マチンの公式
Machin's Formula

マチンの公式 (Machin's formula) とは，1706 年にイギリスの天文学者ジョン・マチン (John Machin) によって発見された逆三角関数を用いた円周率を計算するための公式である．彼自身もこの公式を用いて円周率を 100 桁まで計算している．似たような $\arctan(x)$ を用いた公式はその後いくつも発見されている．これらの公式は 1970 年代に算術幾何平均などが用いられるようになるまでは円周率の計算に用いられ計算競争に貢献した．2002 年には金田康正によって $\arctan(x)$ を用いた高野喜久雄の公式が用いられ円周率を 1 兆 2411 億桁まで計算するという記録に結びついた．ちなみに高野喜久雄は新潟県出身で神奈川県の高校教諭であった．

$$\boxed{\textbf{マチンの公式}\quad 4\arctan\left(\frac{1}{5}\right)-\arctan\left(\frac{1}{239}\right)=\frac{\pi}{4}}$$

[証明]　$\arctan\left(\frac{1}{5}\right)=\alpha, \arctan\left(\frac{1}{239}\right)=\beta$ とおくと

$$\tan\alpha=\frac{1}{5}, \tan\beta=\frac{1}{239}$$

$$\begin{aligned}
\tan 2\alpha &= \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} \\
&= \frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{1}{25}} \\
&= \frac{5}{12} \\
\tan 4\alpha &= \frac{2\tan 2\alpha}{1-\tan^2 2\alpha} \\
&= \frac{\frac{5}{6}}{1-\frac{25}{144}} \\
&= \frac{120}{119} \\
\tan(4\alpha-\beta) &= \frac{\tan 4\alpha-\tan\beta}{1+\tan 4\alpha\tan\beta} \\
&= \frac{\frac{120}{119}-\frac{1}{239}}{1+\frac{120}{119}\times\frac{1}{239}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{120 \times 239 - 119}{119 \times 239 + 120} \\
&= 1 \\
\therefore 4\alpha - \beta &= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}
$$

[証明終わり]

まず最初に $\arctan(x)$ の級数展開を求めなければならない．$\arctan(x)$ の n 次導関数を求めるのはかなり面倒な計算になる．1 階から順に示すと，

(1) $$\frac{1}{x^2+1}$$

(2) $$-\frac{2\,x}{\left(x^2+1\right)^2}$$

(3) $$\frac{8\,x^2}{\left(x^2+1\right)^3}-\frac{2}{\left(x^2+1\right)^2}$$

(4) $$\frac{24\,x}{\left(x^2+1\right)^3}-\frac{48\,x^3}{\left(x^2+1\right)^4}$$

(5) $$\frac{24}{\left(x^2+1\right)^3}-\frac{288\,x^2}{\left(x^2+1\right)^4}+\frac{384\,x^4}{\left(x^2+1\right)^5}$$

(6) $$-\frac{720\,x}{\left(x^2+1\right)^4}+\frac{3840\,x^3}{\left(x^2+1\right)^5}-\frac{3840\,x^5}{\left(x^2+1\right)^6}$$

(7) $$-\frac{720}{\left(x^2+1\right)^4}+\frac{17280\,x^2}{\left(x^2+1\right)^5}-\frac{57600\,x^4}{\left(x^2+1\right)^6}+\frac{46080\,x^6}{\left(x^2+1\right)^7}$$

(8) $$\frac{40320\,x}{\left(x^2+1\right)^5}-\frac{403200\,x^3}{\left(x^2+1\right)^6}+\frac{967680\,x^5}{\left(x^2+1\right)^7}-\frac{645120\,x^7}{\left(x^2+1\right)^8}$$

(9) $$\frac{40320}{\left(x^2+1\right)^5}-\frac{1612800\,x^2}{\left(x^2+1\right)^6}+\frac{9676800\,x^4}{\left(x^2+1\right)^7}-\frac{18063360\,x^6}{\left(x^2+1\right)^8}+\frac{10321920\,x^8}{\left(x^2+1\right)^9}$$

(10) $$-\frac{3628800\,x}{\left(x^2+1\right)^6}+\frac{58060800\,x^3}{\left(x^2+1\right)^7}-\frac{243855360\,x^5}{\left(x^2+1\right)^8}+\frac{371589120\,x^7}{\left(x^2+1\right)^9}-\frac{185794560\,x^9}{\left(x^2+1\right)^{10}}$$

(11) $$-\frac{3628800}{\left(x^2+1\right)^6}+\frac{217728000\,x^2}{\left(x^2+1\right)^7}-\frac{2032128000\,x^4}{\left(x^2+1\right)^8}+\frac{6502809600\,x^6}{\left(x^2+1\right)^9}-\frac{8360755200\,x^8}{\left(x^2+1\right)^{10}}+\frac{3715891200\,x^{10}}{\left(x^2+1\right)^{11}}$$

ここで，1 階導関数の

$$\frac{1}{x^2+1}$$

に注目する．この分母の 2 乗が計算を難しくしているわけで，ここをただの x に変えて

$$\frac{1}{x+1}$$

にしてこれを微分してみよう．

(1)
$$-\frac{1}{(x+1)^2}$$

(2)
$$\frac{2}{(x+1)^3}$$

(3)
$$-\frac{6}{(x+1)^4}$$

(4)
$$\frac{24}{(x+1)^5}$$

(5)
$$-\frac{120}{(x+1)^6}$$

(6)
$$\frac{720}{(x+1)^7}$$

(7)
$$-\frac{5040}{(x+1)^8}$$

(8)
$$\frac{40320}{(x+1)^9}$$

(9)
$$-\frac{362880}{(x+1)^{10}}$$

一般に，

$$((x+1)^{-1})^{(n)} = (-1)(-2)(-3)\cdots(-n)(x+1)^{-1-n} = (-1)^n n!(x+1)^{-1-n}$$

であるから，$f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ とすると

$$f^{(n)}(0) = (-1)^n n!$$

よって $f(x)$ のマクローリン展開は

$$f(x) = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + \cdots$$

$f(x)$ の x を x^2 に代えて

$$f(x^2) = \frac{1}{x^2+1} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots$$

これを項別積分すれば $\arctan(x)$ の級数展開となる．

$$\arctan x = \int \frac{dx}{x^2+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$$

表 1 に Excel で計算した結果を示す．0 項から 9 項までの計算で小数点以下 14 桁まで正しく求めることができるが，Excel ではこれが限界である．$\arctan\dfrac{1}{239}$ の方は $\arctan\dfrac{1}{5}$ と比べると，ずっと速く収束するので計算を早めに切り上げてもかまわない．

0	16*arctan(1/5)=	3.2	4*arctan(1/239)=	-0.016736402		3.183263598326360
1		-0.042666667		9.76664E-08		-0.042666569000300
2		0.001024		-1.02589E-12		0.001023999998974
3		-2.92571E-05		1.28285E-17		-0.000029257142857
4		9.10222E-07		-1.74677E-22		0.000000910222222
5		-2.97891E-08		2.50202E-27		-0.000000029789091
6		1.00825E-09		-3.70633E-32		0.000000001008246
7		-3.49525E-11		5.62342E-37		-0.000000000034953
8		1.23362E-12		-8.68654E-42		0.000000000001234
9		-4.41506E-14		1.36065E-46		-0.000000000000044
	π=	3.158328958	+	-0.016736304	=	3.141592653589790

表 1

マチン (John Machin)(1680?-1751)

イギリスの天文学者．前半生についてはよくわかっていない．ケンブリッジのセントジョンカレッジに入学．1701 年ブルック・テイラーの数学の家庭教師をする．テイラーは 2 年後に同大学に入学．長年テイラーと交友関係を続け，このことは数学を理解することに有益だった．彼らは，その頃の数学者がよく議論に使ったコーヒーハウスで会っていた．1712 年にテイラーがマチンに書いた手紙の中にテイラーの定理についての記述がある．その中にマチンがテイラーにコーヒーハウスで言ったこの定理に関するコメントについて書かれている．このほかにオックスフォードで教えていたキールとも親しく，ドモアブルの家庭教師もしていた．1710 年に王立協会の会員に選ばれる．またニュートンとライプニッツの微分積分に関する紛争に関する委員会の委員も務め，ニュートン側にたつ (1712)．1713 年にロンドンのグラシャムカレッジの天文学教授となる．その後学部長になり亡くなるまで続ける．

参考文献

[1] 「Wikipedia」`<http://en.wikipedia.org/wiki/>`

[2] School of Mathematics and Statistics University of St Andrews, Scotland [The MacTutor History of Mathematics archive] `<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/>`