連分数とモジュラー変形

連分数とは

$$a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \cdots}}}$$

のような形の式をいう．ここでは分子 $b_1, b_2, b_3 \cdots = 1$ であるようなつまり

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots}}}$$

のような形のみを扱う．このような連分数を**正則連分数**と呼ぶことがある．また $a_0, a_1, a_2, \cdots$ に関しては,

$$\omega_n = a_n + z$$

とした場合,

$$a_n = [\omega_n]$$

つまり，その時点での残りの連分数を全て含めた ω_n の整数部分とする．

$$\begin{aligned} \omega_n &= a_n + \frac{1}{\omega_{m+1}} \\ &= \frac{a_n \omega_{n+1} + 1}{\omega_{n+1} + 0} \end{aligned}$$

と表せる．

定義 1 一般に，実数または虚数の変数 x, y が,

$$x = \frac{ay + b}{cy + d} \tag{1}$$

と表せ，a, b, c, d が整数で

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \pm 1$$

であるとき，このような変形を**モジュラー変形** (modular transformation) という．

この変形は $y = -\dfrac{d}{c}$ 以外で定義できる．(1) の変形を行列を用いて

$$x = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} y$$

と表すことにする．モジュラー変形を結合すれば，その結果は一つのモジュラー変形である．つまりモジュラー変形は群をなす．モジュラー変形には次の性質がある．モジュラー変形を表す行列を A, B とし，変換する変数を x, y とすると

1. $A(B)y = (AB)y$

2. $Ey = y$
3. $x = Ay$ ならば $y = A^{-1}x$

連分数展開も一種のモジュラー変形である．つまり

$$\begin{aligned}\omega_n &= a_n + \frac{1}{\omega_{m+1}} \\ &= \frac{a_n \omega_{n+1} + 1}{\omega_{n+1} + 0} \\ &= \begin{pmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \omega_{n+1}\end{aligned}$$

さらには

$$\begin{aligned}\omega_0 &= a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{\omega_{n+1}}}}}} \\ &= \begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \omega_{n+1}\end{aligned}$$

と表すことができる．有理数の連分数展開は有限回で終わるが，無理数の連分数展開は無限に続く．連分数展開は数式処理ソフトを用いると容易に求めることができる．wxMaxima を用いて連分数展開を行った例をいくつか次に示す．

[例 1] 有理数 $\dfrac{5678}{12345}$ の連分数展開．cf は contiued fraction の略.

```
(%i1) cf(56789/12345);
(%o1) [4,1,1,1,1,246,3,3]
(%i2) cfdisrep(%);
(%o2)
```

$$4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{246 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{3}}}}}}}$$

```
(%i3) rat(%);
(%o3)
```

$$\frac{56789}{12345}$$

```
(%i4) float(%);
(%o4) 4.60016200891049
```

[例 2] 無理数 $\sqrt{7}$ の連分数展開.

(%i1) cf(sqrt(7)),cflength=2;

(%o1) [2,1,1,1,4,1,1,1,4]

(%i2) cfdisrep(%);

(%o2)

$$2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4}}}}}}}}$$

(%i3) rat(%);

(%o3)

$$\frac{590}{223}$$

(%i4) float(%);

(%o4) 2.645739910313901

[例 3] 超越数 π の連分数展開は wxMaxima0.7.3a では残念ながらうまくいかない．近似値から連分数展開を行うと，

(%i1) %pi;

(%o1)

$$\pi$$

(%i2) float(%);

(%o2) 3.141592653589793

(%i3) cf(%);

(%o3) [3,7,15,1,292]

(%i4) cfdisrep(%);

(%o4)

$$3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{292}}}}$$

(%i5) rat(%);

(%o5)

$$\frac{103993}{33102}$$

(%i6) float(%);

(%o6) 3.141592653011903

連分数展開は一意である．整数でない ω が次のように二通りに連分数展開できたとする．

$$\begin{aligned}\omega &= \begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\omega_{n+1} \\ &= \begin{pmatrix} b_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} b_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\omega'_{n+1}\end{aligned}$$

いま

$$\begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\omega_{n+1} = x$$
$$\begin{pmatrix} b_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} b_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\omega'_{n+1} = y$$

とすると，

$$\begin{aligned}\omega &= \begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x = a_0 + \frac{1}{x} \\ &= \begin{pmatrix} b_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} y = b_0 + \frac{1}{y}\end{aligned}$$

a_0, b_0 は整数部分なので等しい．つまり $x = y$ でもある．これを繰り返すと，

$$a_n = b_n, \omega_{n+1} = \omega'_{n+1}$$

となり，連分数展開は一意であることがいえる．また，

$$\begin{pmatrix} P_0 \\ Q_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} P_n & P_{n-1} \\ Q_n & Q_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (n \geq 1)$$

とすると，

$$\begin{pmatrix} P_n \\ Q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{n-1}a_n + P_{n-2} \\ Q_{n-1}a_n + Q_{n-2} \end{pmatrix} \quad (n \geq 2)$$

である．また

$$\begin{vmatrix} P_n & P_{n-1} \\ Q_n & Q_{n-1} \end{vmatrix} = (-1)^n$$

である．また

$$\begin{aligned}\omega &= \begin{pmatrix} P_n & P_{n-1} \\ Q_n & Q_{n-1} \end{pmatrix}\omega_{n+1} \\ &= \frac{P_n\omega_{n+1} + P_{n-1}}{Q_n\omega_{n+1} + Q_{n-1}}\end{aligned}$$

と表せる．ここで

$$\begin{aligned}\frac{P_n}{Q_n} - \omega &= \frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_n\omega_{n+1} + P_{n-1}}{Q_n\omega_{n+1} + Q_{n-1}} \\ &= \frac{P_nQ_{n-1} - P_{n-1}Q_n}{Q_n(Q_n\omega_{n+1} + Q_{n-1})} \\ &= \frac{(-1)^n}{Q_n(Q_n\omega_{n+1} + Q_{n-1})}\end{aligned}$$

さて

$$Q_0 = 1, Q_1 = a_1, Q_2 = a_1 a_2 + 1, \cdots, Q_n = a_n Q_{n-1} + Q_{n-2}, \cdots$$

であるから

$$1 = Q_0 \leq Q_1 < Q_2 < \cdots < Q_n < \cdots$$

しかもこれらは全て整数なので,

$$\lim_{n\to\infty} Q_n = \infty$$

$$[\omega_{n+1}] = a_n + 1$$

であるから,

$$\omega_n + 1 > a_n + 1$$

$$\therefore \left| \frac{P_n}{Q_n} - \omega \right| = \frac{1}{Q_n(Q_n \omega_{n+1} + Q_{n-1})} < \frac{1}{Q_n(Q_n a_{n+1} + Q_{n-1})} = \frac{1}{Q_n Q_{n+1}} < \frac{1}{{Q_n}^2}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{P_n}{Q_n} = \omega$$

$\dfrac{P_n}{Q_n}$ を ω の**近似分数**という.

定義 2 二つの数 x, y がモジュラー変形によって結び付けられるとき，つまり

$$x = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} y, \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \pm 1$$

であるとき，x, y はモジュラー変形に関して**対等** (equivalent) あるいは単に対等であるという.

参考文献

[1] 高木貞治『初等整数論講義第 2 版』(共立出版社，1997 年)

[2] 竹内薫『はじめての数式処理ソフト』(講談社，2007 年)

[3] 河村央也「青空学園数学科」<http://www33.ocn.ne.jp/~aozora_gakuen/>

[4] 「ウィキペディア」<http://ja.wikipedia.org/wiki/>