モンモール数

0.1 完全順列

集合 $\{1, 2, 3, \cdots, n\}$ 上の順列の $p_1p_2p_3\cdots p_n$ で $p_i \neq i (1 \leqq i \leqq n)$ を満たすものを**完全順列**, **攪乱順列**または**乱列**[*1](derangement) といい，またその個数を**モンモール数**(Montmort number) と呼ぶ．これはフランスの数学者モンモール (Pierre Raymond de Montmort) にちなんで名づけられた．1708 年モンモールにより $n = 13$ の場合の問題として提唱された．一般の n の場合はオイラー (Leonhard Euler) によって解決される[*2]．集合 $1, 2, 3, \cdots, n$ 上の完全順列の個数を考察する．$1 \leqq n \leqq 4$ について，完全順列を示す (**表 1**).

表 1 完全順列

n	集合 $\{1, 2, 3, \cdots, n\}$ 上の完全順列
1	
2	21
3	231,312
4	2143,2341,2413,3142,3412,3421,4321,4312,4123

n 種類の完全順列の数，つまり n 番目のモンモール数を m_n で表すことにする．**表 1** より，

$$m_1 = 0, m_2 = 1, m_3 = 2, m_4 = 9$$

であることがわかるが，数え上げないで m_n を求めてみよう．4 種類の場合，重複を考えない場合，全ての場合は $4! = 24$ ある．この中から重なる場合を引いていけばいいわけで，

$$m_4 = 4! -_4 \mathrm{C}_1 m_3 - {}_4\mathrm{C}_2 m_2 - {}_4\mathrm{C}_3 m_1 - 1$$

となる．${}_4\mathrm{C}_1 m_3$ は何を表しているのかというと，4 つの要素のうち 1 つだけ完全順列を乱すものがある，つまり $p_i = i$ となる p_i が 1 つだけあるという場合である．同様に ${}_4\mathrm{C}_2 m_2$ は 2 つ $p_i = i$ となる場合，${}_4\mathrm{C}_3 m_1$ は 3 つ $p_i = i$ となる場合であるが，この場合は 0 である．最後の 1 は元の並びと全く同じ場合で ${}_4\mathrm{C}_4 m_0$ と書いても同じである．ただし，$m_0 = 1$ である．これを計算すると，

$$\begin{aligned} m_4 &= 4 \times 3 \times 2 \times 1 - 4 \times 2 - \frac{4 \times 3}{2 \times 1} \times 1 - 1 \\ &= 24 - 8 - 6 - 1 = 9 \end{aligned} \tag{1}$$

このように $k < n$ の m_k がわかっていれば，m_n がわかる．

$$m_5 = 5! -_5 \mathrm{C}_1 m_4 - {}_5\mathrm{C}_2 m_3 - {}_5\mathrm{C}_3 m_2 - {}_5\mathrm{C}_4 m_1 - {}_5\mathrm{C}_5 m_0 \tag{2}$$

$$\begin{aligned} &= 5! - 5m_4 - 10m_3 - 10m_2 - 5m_1 - m_0 \\ &= 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 - 5 \times 9 - 10 \times 2 - 10 \times 1 - 5 \times 0 - 1 \\ &= 120 - 45 - 20 - 10 - 0 - 1 \\ &= 44 \end{aligned} \tag{3}$$

[*1] インターネットで検索するとこの順番で多く使われるようである．
[*2] 参考文献 [5]

(2) を変形すると，

$$\begin{aligned} 5! &= {}_5\mathrm{C}_0 m_5 + {}_5\mathrm{C}_1 m_4 + {}_5\mathrm{C}_2 m_3 + {}_5\mathrm{C}_3 m_2 + {}_5\mathrm{C}_4 m_1 + {}_5\mathrm{C}_5 m_0 \\ &= m_5 + 5m_4 + 10m_3 + 10m_2 + 5m_1 + m_0 \end{aligned}$$

となり，係数は 5 乗の展開公式のときと同じ，つまりパスカルの 3 角形と同じである．

$$\begin{aligned} m_6 &= 6! - 6m_5 - 15m_4 - 20m_3 - 15m_2 - 6m_1 - m_0 \\ &= 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 - 6 \times 44 - 15 \times 9 - 20 \times 2 - 15 \times 1 - 6 \times 0 - 1 \\ &= 720 - 264 - 135 - 40 - 15 - 0 - 1 \\ &= 265 \end{aligned} \tag{4}$$

定理 1. 一般に

$$n! = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k m_k$$

ここでクーポン順列[*3]を思い出すと，

$${}_5\mathrm{Q}_n = 5^n - {}_4\mathrm{Q}_n \cdot {}_5\mathrm{C}_4 - {}_3\mathrm{Q}_n \cdot {}_5\mathrm{C}_3 - {}_2\mathrm{Q}_n \cdot {}_5\mathrm{C}_2 - {}_1\mathrm{Q}_n \cdot {}_5\mathrm{C}_1$$

と完全順列の式 (1) は形が非常に似ている．最初が $5!$ であるか 5^n であるかの違いである．つまり通常の順列をベースにしているか重複順列をベースにしているかの違いである．クーポン順列でも，

$${}_n\mathrm{Q}_r = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}\ {}_n\mathrm{C}_k k^r$$

と表せたように完全順列も別の表し方がある．

定理 2. n 番目のモンモール数を m_n とすると

$$m_n = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\right)$$

が成り立つ．

[**証明**] 集合 $\{1, 2, 3, \cdots, n\}$ 上の順列 $p_1 p_2 p_3 \cdots p_n$ を考えるとき，その総数は言うまでもなく

$$n!$$

である．そのち $p_1 = 1$ を満たすものを数えると，当然 $(n-1)!$ であるから，総数からこの n 倍を引いてやる．

$$n! - n(n-1)!$$

これでは引きすぎているのは明らかである．実際 0 になってしまうわけで，引きすぎた分を足さなくてはならない．$p_1 = 1$ かつ $p_2 = 2$ となるものの総数は $(n-2)!$ であるから，その ${}_n\mathrm{Q}_2$ 倍をたしてやる．

$$n! - n(n-1)! + \frac{n!}{2!(n-2)!}(n-2)! = n! - n(n-1)! + \frac{n!}{2!}$$

[*3] 重複順列 ${}_r\Pi_n$ のうち r 種類を全て網羅する順列をクーポン順列と呼び ${}_r\mathrm{Q}_n$ と表すこととする．これは一般的な用語ではなく，私個人が勝手につけた名前と記号である．

今度は足しすぎたので，$(n-3)!$ の ${}_n\mathrm{Q}_3$ 倍を引いてやる．

$$n! - n(n-1)! + \frac{n!}{2!} - \frac{n!}{3!(n-3)!}(n-3)! = n! - n(n-1)! + \frac{n!}{2!} - \frac{n!}{3!}$$

これを繰り返してゆくと，

$$m_n = n! - \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} - \cdots + \frac{(-1)^n \cdot n!}{n!} = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\right)$$

[証明終わり]

このように引きすぎたものは足して，足しすぎたものは引いていく方法を**包除原理**(principle of inclusion and exclusion) と呼ぶ．

定理 2. は反転公式

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k b_k \Leftrightarrow b_n = \sum_{r=0}^{n} (-1)^{n-r} {}_n\mathrm{C}_r a_r$$

を用いても容易に証明できる．-1 の指数が k ではなく $n-k$ であることに注意する．**定理 1.** より

$$n! = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k m_k \Leftrightarrow m_n = \sum_{r=0}^{n} (-1)^{n-r} {}_n\mathrm{C}_r r! = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

反転公式は行列で表すと，関係が理解しやすい．[*4]

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ {}_n\mathrm{C}_0 & {}_n\mathrm{C}_1 & {}_n\mathrm{C}_2 & \cdots & {}_n\mathrm{C}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (-1)^n {}_n\mathrm{C}_0 & (-1)^{n-1} {}_n\mathrm{C}_1 & (-1)^{n-2} {}_n\mathrm{C}_2 & \cdots & {}_n\mathrm{C}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

この定理はオイラーが発見したという記述がインターネット上にあるが真偽は定かではない．[*5]

問題 1. $n \times n$ のチェス盤上に n 個の駒を，どの 2 個の駒も同じ行，同じ列にならないように並べる (**図** 1). 順列 $p_1 p_2 p_3 \cdots p_n$ において，p_i は i 行目，p_i 列目と解釈する．ただし，主対角線上 (×印) には並ばないようにする．このとき n 個の駒の並べ方は何通りあるか.

[**解**]　n 個の完全順列にほかならない．つまり求める場合の数は m_n である．$n=4$ の場合は (**図 2**) のようになる．完全順列に関する問題としては，このほかにプレゼント交換の問題や席替えの問題が有名である．

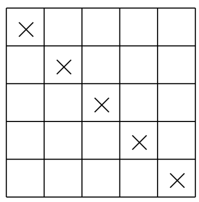

図 1　5 × 5 のチェス盤

[*4] この部分の記述に関して参考文献 [1] に誤りあり
[*5] 参考文献 [2]

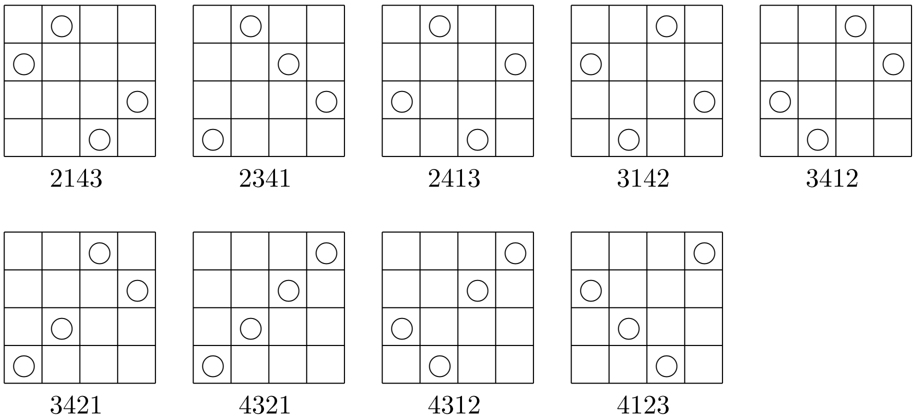

図 2　集合 $\{1,2,3,4\}$ 上の完全順列

0.2　完全順列を生成する漸化式

定理 3. n 番目のモンモール数を m_n とすると，3 項間漸化式

$$m_{n+1} = n(m_n + m_{n-1}) \quad (n \geqq 1, m_0 = 1, m_1 = 0)$$

が成り立つ.

[**証明**]　**定理 2.** より

$$\begin{aligned}
m_n + m_{n-1} &= n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\right) + (n-1)!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\right) \\
&= (n+1)(n-1)!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\right) + (-1)^n \\
n(m_n + m_{n-1}) &= (n+1)!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\right) + (-1)^n n \\
&= (n+1)!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\right) + (-1)^n (n+1-1) \\
&= (n+1)!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\right) + (n+1)(-1)^n + (-1)^{n+1} \\
&= (n+1)!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\right) + (n+1)!\left(\frac{(-1)^n}{n!} + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}\right) \\
&= (n+1)!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}\right) \\
&= m_{n+1}
\end{aligned}$$

[証明終わり]

(1),(3),(4) の答とその 1 行前の第 2 項目は数字が 1 だけ違うということが見て取れる．一般に次の漸化式が成り立つ．この漸化式は**定理 3.** と比べてより簡単である.

定理 4.

$$m_n = n m_{n-1} + (-1)^n \quad (n \geqq 1, m_0 = 1)$$

[証明]　**定理 2.** より

$$\begin{aligned} nm_{n-1} + (-1)^n &= n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\right) + (-1)^n \\ &= n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{(-1)^n}{n!}\right) \\ &= m_n \end{aligned}$$

[証明終わり]

0.3　完全順列となる確率

定理 5. n 個の順列が完全順列になる確率 P_n は

$$P_n = \frac{m_n}{n!} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}$$

である．

[証明略]

定理 4 の右辺は e^{-x} のマクローリン展開に $x = 0$ を代入したものにほかならないので，その極限は

表 2　完全順列になる確率

n	順列が完全順列になる確率
1	0
2	0.5
3	$0.333\cdots$
4	0.375
5	$0.3666\cdots$
6	$0.3680555\cdots$
7	$0.367857142857142\cdots$

$1/e = 0.367879\cdots$ に収束する．その収束速度は速く，$n = 10$ で小数点以下 7 桁まで一致する．

0.4　モンモールについて

ピエール・レイモンド・ド・モンモール (Pierre Raymond de Montmort)，フランスの数学者．1678 年 10 月 27 日パリに生まれ，1719 年 10 月 7 日同じくパリで亡くなる．彼の本当の名前は単にピエール・レイモンド（Pierre Remond または Raymond）である．父は法律を学ばせようとしたが，逆らってイギリスとドイツを旅する．1699 年フランスに帰国したとき父からの巨額の遺産を受け取り，そのお金で城を買う．その城の名がモンモール城 (de Montmort) という．彼は何人かの有名な数学者と親交があり，特にニコラス・ベルヌーイ (Nicholas Bernoulli) とはモンモール城にて共同研究を行っている．再び旅立ったイギリスにおいてモンモールは 1715 年にロンドン王立協会の会員に選ばれる．またその翌年フランス科学アカデミーの会員にも選ばれている．

モンモールはゲームに勝つ確率についての著作で知られる．それは組合せ理論における完全順列の研究の先駆けである．彼はまた「パスカルの三角形」の名付け親としても知られる．

モンモールは差分の研究も行った．1713 年には n 項有限級数,

$$na + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\Delta a + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\Delta^2 a + \cdots ,$$

を発見している．Δ は前進差分演算子である．この理論はゴールドバッハがモンモールとは独立して 1718 年に発見している．[*6]

参考文献

[1] 仙波一郎『組合せ数学』（コロナ社，1999 年）春日井市図書館蔵

[2] Ryusei「図形・数の不思議」<http://www2.ocn.ne.jp/~mizuryu/jyugyo/suugaku6.html>

[3] 西條和久「完全順列と e との関係について」
<http://homepage3.nifty.com/sugaku/kanzen.pdf#search=' **完全順列**'>

[4] 友田勝久「反転公式とその利用」<http://www.osaka-kyoiku.ac.jp/~tomodak/report/kanzen.pdf>

[5] イズミ「Izumi の数学」<http://izu-mix.com/math/exam/toukou/2004_1.html>

[6] 「ウィキペディア」<http://ja.wikipedia.org/wiki/>

[7] 「Wikipedia」<http://en.wikipedia.org/wiki/>

[*6] 参考文献 [7] を翻訳