ナポレオンの定理とナポレオン点

定理 1　$\triangle ABC$ の外側に三つの正三角形 $\triangle\ ABD$, $\triangle\ BCE$, $\triangle\ CAF$ をかくと，その三つの正三角形の重心を結んだ三角形は正三角形である．

[証明]

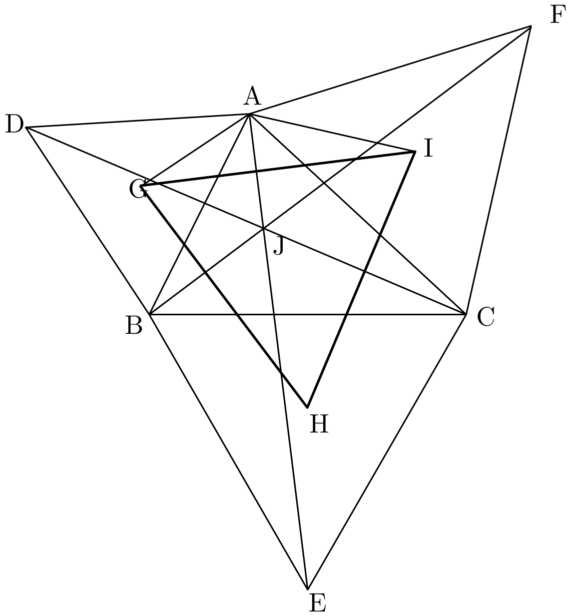

図 1

$$\triangle\ ADC \equiv \triangle\ ABF$$
$$\therefore DC = BF$$

同様に

$$DC = BF$$

同様に

$$\triangle ADC \sim \triangle AGI$$
$$GI = \frac{1}{\sqrt{3}} DC$$

同様にして

$$GI = GH = HI = \frac{1}{\sqrt{3}}DC$$

[証明終わり]

この様な正三角形を**ナポレオンの三角形**と呼ぶ．ナポレオンの三角形にはもう一つ内側の正三角形がある．定理 1 は外側のナポレオンの三角形について述べている．内側の三角形については次の定理で示す．

定理 2　$\triangle ABC$ の内側に三つの正三角形 $\triangle\, ABD$, $\triangle\, BCE$, $\triangle\, CAF$ をかくと，その三つの正三角形の重心を結んだ三角形は正三角形である．

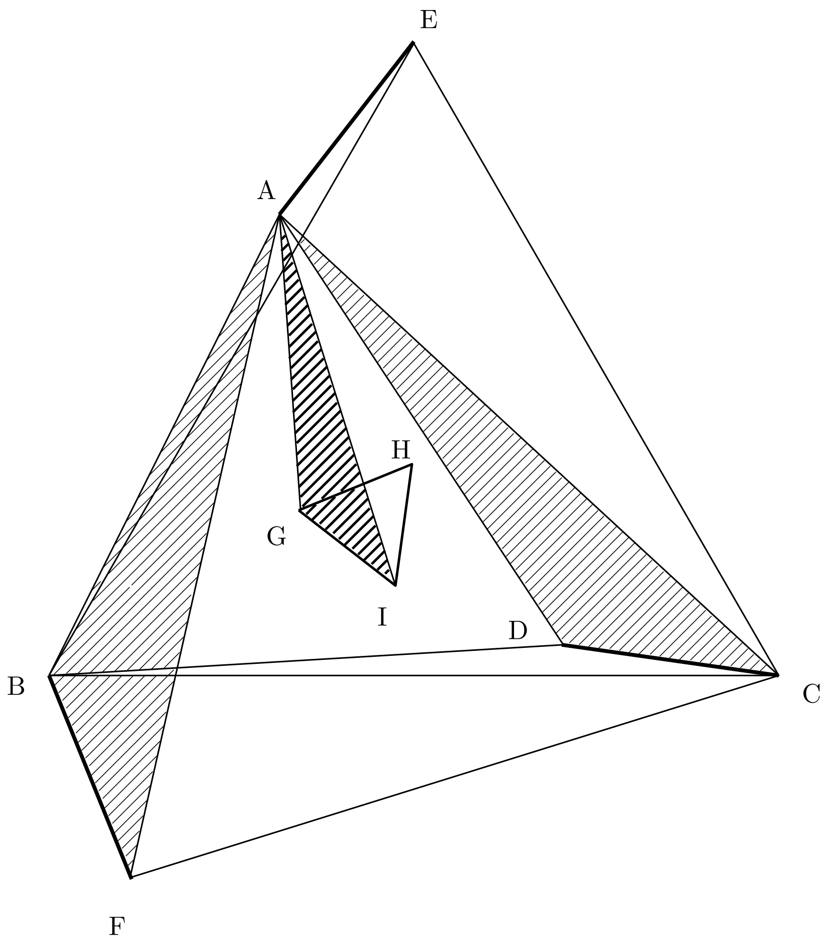

図 2

証明は定理 1 となんら変らない．薄い斜線の三角形は合同であり，さらに濃い斜線の三角形は相似であることを利用する．

定理 3　$\triangle ABC$ の外側に三つの正三角形 $\triangle\, ABD$, $\triangle\, BCE$, $\triangle\, CAF$ をかく，それぞれの正三角形の重心を G, H, I とすると，AH, BI, CJ は一点で交わる．

この証明は初等幾何的にはやや難しい.

[証明]

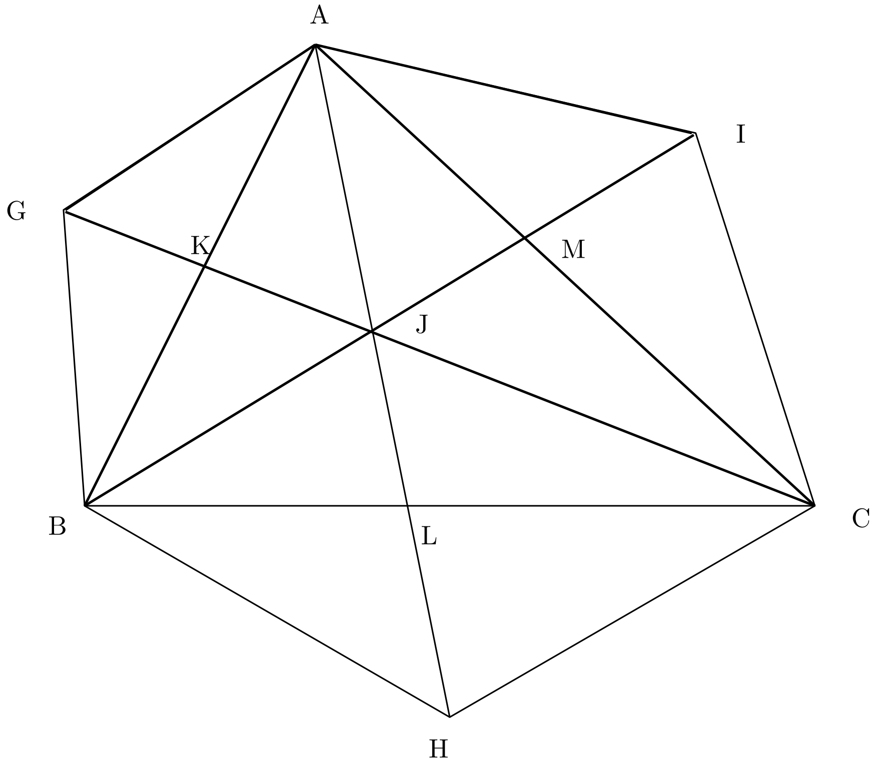

図 3

図 3 のように点をおく.

$$AG = \frac{1}{\sqrt{3}}AK, AC = \sqrt{3}AI$$

$$\angle GAC = \angle BAI = \angle BAC + 30^\circ$$

これらのことより

$$\triangle GAC = \triangle BAI$$

同様に頂点 B,C に関して同じ位置にある二つの三角形についても，面積が等しいことが言える.

$$\frac{AK}{BK} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{AM} = \frac{\triangle AGC}{\triangle BGC} \cdot \frac{\triangle BHA}{\triangle CHA} \cdot \frac{\triangle ICB}{\triangle IAB} = \frac{\triangle AGC}{\triangle BHA} \cdot \frac{\triangle BHA}{\triangle ICB} \cdot \frac{\triangle ICB}{\triangle AGC} = 1$$

つまり $\triangle\ ABC$ の辺上の点 K, L, M についてチェバの定理が成り立っているので，この三直線は一点で交わることが証明された. [証明終わり]

このような交点（図 3 の点 J）を $\triangle\ ABC$ のナポレオン点と呼ぶ. この証明は，三角形の外側に相似な二等辺三角形をかいたときに常に適用できる. 図がみにくくなるために省略するが，内側に三角形をかいた場合も証明は同様である. なお外側のナポレオン点を第一ナポレオン点，内側のナポレオン点を第二ナポレオン点と呼ぶこともある.

定理 4　$\triangle\, ABC$ の重心と，$\triangle\, ABC$ のナポレオンの三角形の重心は一致する．

[証明] 複素数平面上に原点を重心とする $\triangle\, ABC$ をかく．それぞれの座標を $A(x), B(y), C(z)$ とすると，原

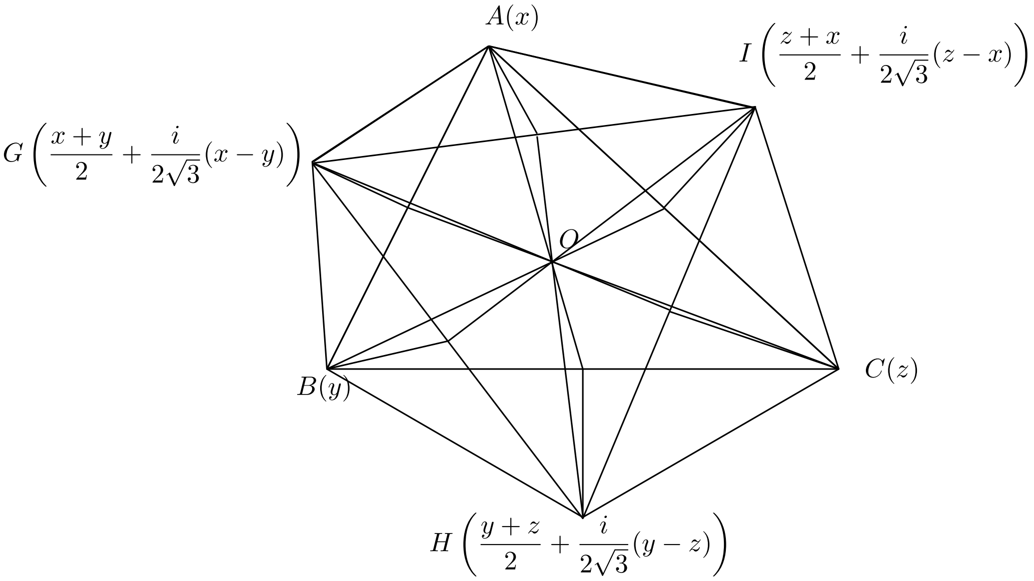

図 4

点が重心なので

$$x+y+z=0 \tag{1}$$

$\triangle ABC$ の外側に三つの正三角形 $\triangle\, ABD$，$\triangle\, BCE$，$\triangle\, CAF$ をかく，それぞれの正三角形の重心を G, H, I とすると，それぞれの座標は，

$$G\left(\frac{x+y}{2}+\frac{i}{2\sqrt{3}}(x-y)\right), H\left(\frac{y+z}{2}+\frac{i}{2\sqrt{3}}(y-z)\right), I\left(\frac{z+x}{2}+\frac{i}{2\sqrt{3}}(z-x)\right)$$

それぞれの座標を加えると (1) より明らかに 0 になる．よって $\triangle\, GHI$ の重心は原点である．　[証明終わり]

この証明は ABC が左回りに配置しているとき，外側のナポレオンの三角形になる．同じ式で ABC が右回りのとき内側のナポレオンの三角形になる．i を $-i$ に変えることにより内側と外側がかわる．

このように複素数やベクトルを用いればこの定理の証明は容易である．しかし初等幾何的に証明しようとすると困難である．

定理 5　三角形の面積は，その外側のナポレオンの三角形と内側のナポレオンの三角形の面積の差に等しい．

[証明]　$\triangle ABC$ の辺 $AB=c, AC=b, \angle BAC=A$ とすると，

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}bc\sin A$$

外側のナポレオンの三角形の一辺の長さを l とすると，図 1 より，

$$l^2=\frac{1}{3}\left\{b^2+c^2-2bc\cos(A+60^\circ)\right\}$$

外側のナポレオンの三角形の面積 S_1 は,

$$S_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}l^2 = \frac{1}{4\sqrt{3}}\left\{b^2 + c^2 - 2bc\cos(A + 60^\circ)\right\}$$

同様に内側のナポレオンの三角形の面積 S_2 は，図 2 より，

$$S_2 = \frac{1}{4\sqrt{3}}\left\{b^2 + c^2 - 2bc\cos(A - 60^\circ)\right\}$$

その差は

$$\begin{aligned} S_1 - S_2 &= \frac{1}{4\sqrt{3}}\left\{2bc\cos(A - 60^\circ) - 2bc\cos(A + 60^\circ)\right\} \\ &= \frac{bc}{2\sqrt{3}}\left(2\sin A \sin 60^\circ\right) \\ &= \frac{1}{2}bc\sin A \\ &= \triangle ABC \end{aligned}$$

[証明終わり]