2 元 3 次不定方程式

問題 1 等式

$$22x^2 = y^3 + (y-x)^2 \tag{1}$$

を満たす自然数 x, y の組のうち，$y \leq 2010$ を満たすものは何組あるか.

[解](1) より

$$21x^2 + 2xy - y^3 - y^2 = 0$$

$$x = \frac{-y \pm y\sqrt{21y+22}}{21} \tag{2}$$

よって

$$21y + 22 = n^2 \quad (n \in \mathbf{N}) \tag{3}$$

とおける．$1 \leq y \leq 2010$ なので

$$43 \leq n^2 \leq 42232$$

$$\therefore \quad 7 \leq n \leq 205 \tag{4}$$

(3) より

$$n^2 \equiv 1 \pmod{21}$$

合同式を解いて，（実際は $n \equiv 0, 1, 2, \cdots, 10$ と代入したほうが早い.）

$$n \equiv \pm 1, \pm 8 \pmod{21}$$ [*1]

また x は正であるから，(2) のルートの前の $\pm$ のマイナスはありえない.

$$\therefore x = \frac{-y + y\sqrt{21y+22}}{21} = \frac{y(n-1)}{21} \tag{5}$$

(3) より

$$y = \frac{n^2 - 22}{21}$$

であるから，これを (5) に代入して

$$x = \frac{(n^2-22)(n-1)}{21^2} \tag{6}$$

$n \equiv 1 \pmod{21}$ のときは，明らかに x は整数となる．それ以外の場合を調べてみよう．$n \equiv -1 \pmod{21}$ のとき $n = 21m - 1$ を (6) の分子に代入すると，

$$(n^2 - 22)(n-1) = 21(21m^2 - 2m - 1)(21m - 2)$$

これが 21^2 の倍数であるためには

$$-2m - 1 \equiv 0 \pmod{21}$$

[*1] ここで 21 が合成数であるため解は 4 個あるが素数を法とする場合は ± 1 のみとなる．解の個数は何種類の素数に素因数分解できるかで決まる.

であることが必要十分．これを解いて，

$$m \equiv 10 \pmod{21}$$

しかし，これは (4) の範囲では 解をもたない（つまり y が 2010 以下という条件が無ければ解はある）．次に $n \equiv 8 \pmod{21}$ のとき $n = 21m + 8$ を (6) の分子に代入すると，

$$(n^2 - 22)(n - 1) = 21(21m^2 + 16m + 2) \cdot 7 \cdot (3m + 1)$$

これが 21^2 の倍数であるためには

$$16m + 2 \equiv 0 \pmod{3}$$

であることが必要十分．これを解いて

$$m \equiv 1 \pmod{3}$$

残りは $n \equiv -8 \pmod{21}$ のとき $n = 21m - 8$ を (6) の分子に代入すると，

$$(n^2 - 22)(n - 1) = 21(21m^2 - 16m + 2) \cdot 3 \cdot (7m - 3)$$

これが 21^2 の倍数であるためには

$$-16m + 2 \equiv 0 \pmod{7}$$

であることが必要十分．これを解いて，

$$m \equiv 1 \pmod{7}$$

ここまでの結果をまとめると，

$$7 \leq n \leq 205$$

の範囲で，

$$n = 21k + 1, 21(3k + 1) + 8, 21(7k + 1) - 8 \quad (k \in \mathbf{I})$$

の形で表せる数ということになる．$n = 21k + 1$ の形で表せる数は，

$$n = 22, 43, 64, 85, 106, 127, 148, 169, 190$$

の 9 個，$n = 21(3k + 1) + 8 = 63k + 29$ の形で表せる数は，

$$n = 29, 92, 155$$

3 つ，$n = 21(7k + 1) - 8 = 147k + 13$ の形で表せる数は，

$$n = 13, 160$$

の 2 つ，合計 14 個 である．x, y の値を求めてみると次のようになる（上記の分類順ではなく，x, y の昇順に記す）．

$$(x, y) = (4, 7), (22, 22), (52, 39), (174, 87), (582, 194), (1372, 343), (1742, 402), (2670, 534), (4602, 767), (7294, 1042), (8382, 1143), (9222, 1218), (10872, 1359), (15462, 1718)$$