n 次方程式の実数解と連分数展開

n 次方程式

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

が整数でない実数解をもつと仮定する．整数でない実数解のうちの一つを α とする．その α が整数 k_0 と k_0+1 の間にあるとすると，

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{\alpha_1}$$

と置くことができ，$\alpha > 1$ である．α_1 は方程式 (1) に

$$x = \begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x_1$$

なる変換を行って得られる

$$f_1(x_1) = 0 \tag{2}$$

の解である．(1) の α 以外の解を $\beta, \gamma, \cdots$ とすれば

$$\beta = \begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \beta_1, \gamma = \begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \gamma, \cdots$$

となるような $\beta_1, \gamma_1, \cdots$ が方程式 (2) の α_1 以外の解である．このように α について連分数展開を行って，いくと

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_{m-1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \alpha_m$$

となり，近似分数 $\dfrac{P_m}{Q_m}$ を実数解 α の近似値とするとき，誤差は $\dfrac{1}{{Q_m}^2}$ より小さい．

さて，このように連分数展開を行ってできた方程式

$$f_m(x_m) = 0 \tag{3}$$

の α_m 以外の解，$\beta_m, \gamma_m, \cdots$ についても同様の変換がほどこされるわけであるから

$$\beta = \begin{pmatrix} P_m & P_{m-1} \\ Q_m & Q_{m-1} \end{pmatrix} \beta_{m+1}, \gamma = \begin{pmatrix} P_m & P_{m-1} \\ Q_m & Q_{m-1} \end{pmatrix} \gamma_{m+1} \cdots$$

である．β についてみると，

$$\beta_{m+1} = \begin{pmatrix} Q_{m-1} & -P_{m-1} \\ -Q_m & P_m \end{pmatrix} \beta = \frac{Q_{m-1}\beta - P_{m-1}}{-Q_m\beta + P_m} = -\frac{Q_{m-1}}{Q_m} \cdot \frac{\beta - \dfrac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}}{\beta - \dfrac{P_m}{Q_m}}$$

m を限りなく増大させるとき

$$\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} \to \alpha, \frac{P_m}{Q_m} \to \alpha$$

ゆえに

$$\frac{\beta - \dfrac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}}{\beta - \dfrac{P_m}{Q_m}} \to \frac{\beta - \alpha}{\beta - \alpha} = 1$$

(ただし，$\beta \neq \alpha$ と仮定する)．Q_{m-1}, Q_m は正の数であるから，β が実数ならば，β_{m+1} はいずれ負になる．

β_{m+1} が負になれば

$$\beta_{m+1} = a_{m+1} + \frac{1}{\beta_{m+2}}$$

すなわち

$$\beta_{m+2} = \frac{1}{\beta_{m+1} - a_m}$$

で，$a_{m+1} \geq 1$ であるから β_{m+2} は負で，かつ絶対値は 1 より小さい．よってある値以上の m に対して，$f_m = 0$ の方程式の正の解は唯一 α_m であり，しかも 1 より大きい．またそれ以外の解は全て負でしかも-1 より大きく 0 より小さい．つまり区間 (-1,0) にある．

[例]

$$f(x) = x^5 - 5x^3 + 4x + 1$$

x に $1 + \dfrac{1}{x}$ を代入すると

$$f_1 = x^5 - 6\,x^4 - 5\,x^3 + 5\,x^2 + 5\,x + 1$$

$f = 0$ は区間 (1,2) に二つ解がある．そのうち 1 に近い方を近似することに心がけよう．$f_1 = 0$ では正の解の大小関係は入れ替わるので，$f_1 = 0$ の一番大きい解が目標の解である．

$$6 + \frac{1}{x}$$

を f_1 の x に代入すると

$$f_2 = 869\,x^5 - 821\,x^4 - 779\,x^3 - 211\,x^2 - 24\,x - 1$$

この時点で $f_2 = 0$ の正の解は α のみとなり，他の解は全て負で区間 $(-1, 0)$ にある．(図 1)

参考文献

[1] 高木貞治『初等整数論講義第 2 版』(共立出版社，1997 年)

[2] 竹内薫『はじめての数式処理ソフト』(講談社，2007 年)

[3] 河村央也「青空学園数学科」<http://www33.ocn.ne.jp/~aozora_gakuen/>

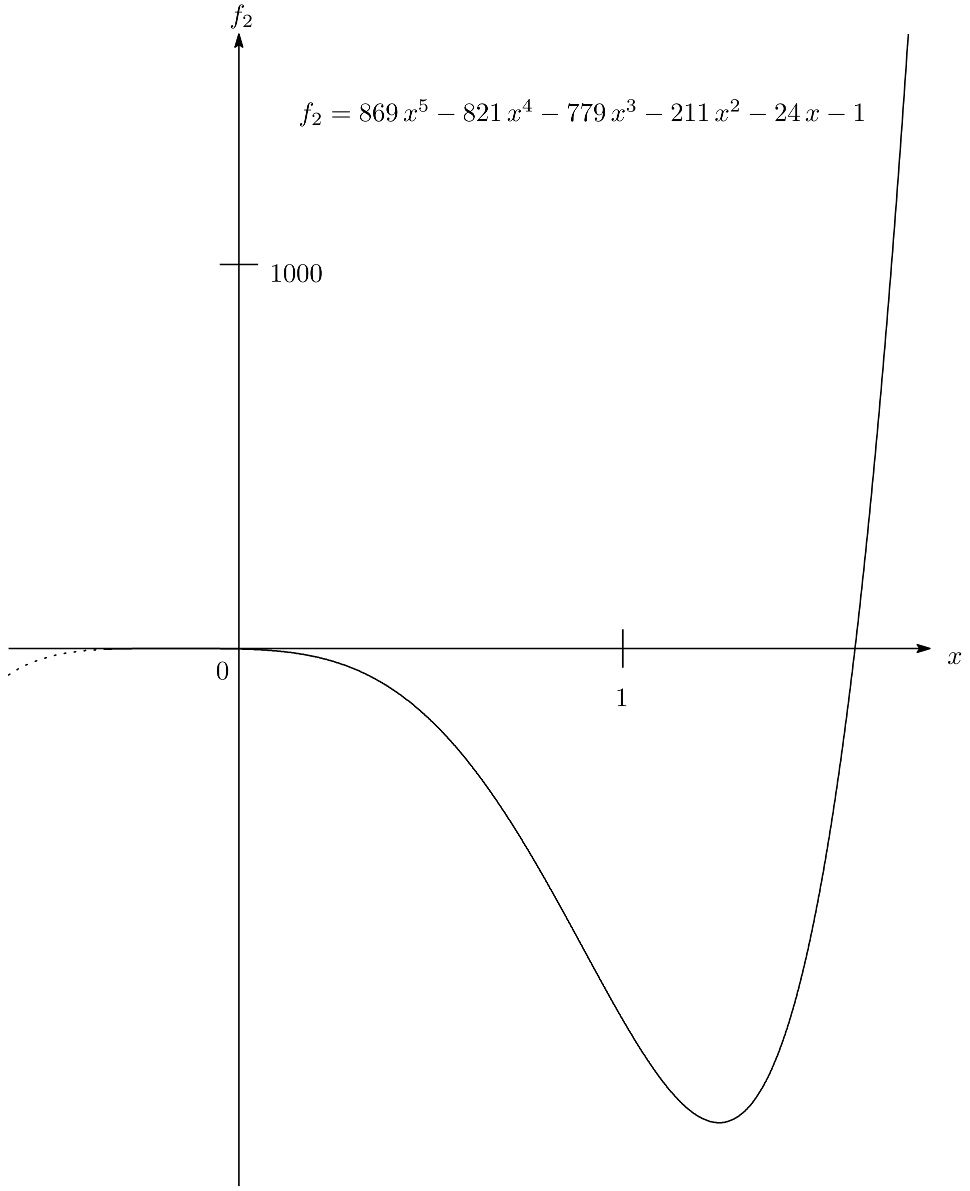

図 1