メビウスの関数と反転公式
Möbius Function & Möbius Inversion Formula

定義 1 $n \in \mathbb{N}$ について

$$\begin{cases} \mu(1) = 1 \\ n \text{ が平方因子を持つとき}, \mu(n) = 0 \\ n \text{ が } k \text{ 個の相異なる素数の積に等しいとき}, \mu(n) = (-1)^k \end{cases}$$

と定義し，この様な関数 $\mu(n)$ を**メビウスの関数**と呼ぶ.

[例]
$\mu(1) = 1, \mu(2) = -1, \mu(3) = -1, \mu(4) = 0, \mu(5) = -1, \mu(6) = 1, \mu(7) = -1, \mu(8) = 0, \mu(9) = 0, \mu(10) = 1$

定理 1 $(m, n) = 1$ のとき

$$\mu(mn) = \mu(m)\mu(n)$$

$(m, n) \neq 1$ のとき

$$\mu(mn) = 0$$

[証明] $(m, n) = 1$ のとき,m, n の素因数分解の結果を

$$m = {p_1}^{e_1}{p_2}^{e_2}{p_3}^{e_3} \cdots {p_j}^{e_j}$$

$$n = {q_1}^{f_1}{q_2}^{f_2}{q_3}^{f_3} \cdots {q_k}^{f_k}$$

とする．e, f の中に一つでも 2 以上のものがあれば,

$$\mu(mn) = \mu(m)\mu(n) = 0$$

e, f が全て 1 であれば,

$$\mu(m) = (-1)^j, \mu(n) = (-1)^k, \mu(mn) = (-1)^{j+k}$$

$$\therefore \mu(mn) = \mu(m)\mu(n)$$

$(m, n) \neq 1$ のときは mn の中に一組以上の素数の平方をもつことになるので当然

$$\mu(mn) = 0$$

[証明おわり]

つまりメビウスの関数は乗法的関数である.

定理 2 $n > 1$ ならば，$\sum^{d|n} \mu(d) = 0$

[証明]

$$n = {p_1}^{e_1}{p_2}^{e_2}{p_3}^{e_3} \cdots {p_k}^{e_k}$$

とすると

$$\sum^{d|n} \mu(d) = \sum^{x} \mu({p_1}^{x_1}{p_2}^{x_2}{p_3}^{x_3}\cdots {p_k}^{x_k})$$

ここで $\sum$ の上の x というのが漠然としているが，$0 \leq x_1 \leq e_1, 0 \leq x_2 \leq e_2, 0 \leq x_3 \leq e_3, \cdots, 0 \leq x_k \leq e_k$ を満たす全ての $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_k$ の組み合わせについての和という意味である．このなかで 0 にならないものを拾い集めれば,

$$\begin{aligned}\sum^{d|n} \mu(d) =&\mu(1) + \{\mu(p_1) + \mu(p_2) + \mu(p_3) + \cdots + \mu(p_k)\}\\ &+ \{\mu(p_1p_2) + \mu(p_1p_2) + \mu(p_1p_3) + \cdots + \mu(p_{k-1}p_k)\}\\ &+ \{\mu(p_1p_2p_3) + \mu(p_1p_2p_4) + \mu(p_1p_2p_5) + \cdots + \mu(p_{k-2}p_{k-1}p_k)\}\\ &+ \mu(p_1p_2p_3\cdots p_k)\\ =&{}_k\mathrm{C}_0 -_k \mathrm{C}_1 +_k \mathrm{C}_2 - \cdots + (-1)^k {}_k\mathrm{C}_k\\ =&0\end{aligned}$$

[証明おわり]

補題 1 $d|n$ かつ $e|d \Longleftrightarrow e|n$ かつ $\dfrac{n}{d}\Big|\dfrac{n}{e}$

[証明] $d|n$ かつ $e|d$ のとき

$$n = ije = id$$

とおける．$e|n$ であることは当然言える．

$$\frac{n}{d} = i, \frac{n}{e} = ij$$

であるから，$\dfrac{n}{d}\Big|\dfrac{n}{e}$. 逆に $\dfrac{n}{d}\Big|\dfrac{n}{e}$ であれば，当然 $d|n, e|n$ であり，なおかつ

$$\frac{n}{e} = k\frac{n}{d}$$

とおけるので,

$$ek = d$$

つまり

$$e|d$$

[証明おわり]

定理 3 （メビウスの反転公式）

$$\sum^{d|n} F(d) = G(n)$$

ならば

$$F(n) = \sum^{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) G(d) \tag{1}$$

[証明]　(1) の右辺に

$$G(d) = \sum^{e|d} F(e)$$

を代入して

$$\begin{aligned} 右辺 &= \sum^{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \sum^{e|d} F(e) \\ &= \sum^{d|n} \sum^{e|d} \mu\left(\frac{n}{d}\right) F(e) \end{aligned}$$

補題より

$$\begin{aligned} 右辺 &= \sum^{e|n} \sum^{\frac{n}{d}|\frac{n}{e}} \mu\left(\frac{n}{d}\right) F(e) \\ &= \sum^{e|n} F(e) \sum^{\frac{n}{d}|\frac{n}{e}} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \end{aligned}$$

定義 1，定理 2 より $\displaystyle\sum^{\frac{n}{d}|\frac{n}{e}} \mu\left(\frac{n}{d}\right)$ は $e = n$ のとき 1，それ以外では 0 なので

$$右辺 = F(n)$$

[証明おわり]

参考文献

[1] 高木貞治『初等整数論講義第 2 版』（共立出版社，1997 年）