平方数を約数にもたない有限等差数列に関する問題

問題 1 項のどれかに 2010 を含む，各項が自然数の等差数列の中で，各項が平方数を約数に持たない有限数列を考える．このような数列の項数の最大値はいくらか．ただし，2010 は初項ではない．また公差は正とする．

［解］以下の解答において (a,b) は a,b の最大公約数を表すこととする．初項が正で，2010 が第 2 項以降なので，公差は 2010 未満である．

等差数列 $\{a_n\}$ の公差を d とすると，素数 p について

1. $(d,p^2)=1 \Leftrightarrow (d,p)=1$ の場合
$$a_n \not\equiv 0 \pmod{p^2}$$
となる連続する項の個数は p^2-1 である．
2. $(d,p^2)=p$ の場合は
$$a_n \not\equiv 0 \pmod{p^2}$$
となる連続する項の個数は $p-1$ であるか，全ての項で，
$$a_n \not\equiv 0 \pmod{p^2}$$
であるかのどちらかである．後者の場合は全ての項で $(a_n,p)=1$ である．もしそうでなければ，いずれかの項で $a_n \equiv 0 \pmod{p^2}$ となってしまうからである．この問題の場合 $2010=2\times3\times5\times67$ であるので，$p=2,3,5,67$ の場合は後者になり得ない．
3. $(d,p^2)=p^2$ の場合は，全ての項で
$$a_n \equiv 0 \pmod{p^2}$$
であるか，あるいは全ての項で，
$$a_n \not\equiv 0 \pmod{p^2}$$
であるかのどちらかである．2010 を含む数列では前者にはなり得ない．

以上のことから 4 の倍数以外の d を公差にもつ場合，平方数を約数に持たない連続する項の個数は 3 以下である．4 の倍数である d について考えれば，d が 9 の倍数でない場合は，平方数を約数に持たない連続する項の個数は 8 以下である．つぎに 4 の倍数でもあり，9 の倍数でもある，つまり 36 の倍数である d について考えれば，d が 25 の倍数でない場合の，平方数を約数に持たない連続する項の個数は 24 以下である．この場合について調べてみよう．$d=36$ とすると，

$$a_n = 36n+1650$$

とおけば，$n=1$ から $n=24$ において
$$a_n \not\equiv 0 \pmod{25}$$

ちなみに 2010 はちょうど第 10 項目である．この a_1 から a_{24} までの間に，他の平方数，つまり 49 以上の平方数で割り切れる数があるか無いかを調べてみよう．

$$a_n = 6(6n+275)$$

なので，合同式

$$6n + 275 \equiv 0 \pmod{49}$$

を解くことにする．

$$6n \equiv -275 \equiv -30 \pmod{49}$$

8 倍して

$$48n \equiv -240 \pmod{49}$$

$$\therefore n \equiv 240 \equiv -5 \pmod{49}$$

つまり $n = 49k - 5$ のとき以外は 49 の倍数ではない．次に 49 で割り切れるのは 44 項目である．つぎに合同式

$$6n + 275 \equiv 0 \pmod{121}$$

を解いてみよう．

$$6n \equiv -275 \equiv -33 \pmod{121}$$

20 倍して

$$120n \equiv -660 \pmod{121}$$

$$\therefore n \equiv 660 \equiv 55 \pmod{121}$$

121 の倍数は 55 項まで現れない．同様に $13^2, 17^2, 19^2$ について調べてもこれらの倍数は 24 項までに表れない．また $a_{24} = 6 \times 419$ なので，これ以上の平方数について調べる必要はない．よって，平方数を約数に持たない連続する項の個数は 24 である等差数列が実際に作れた．これ以外でも 36 の倍数である公差を持つ数列（実際はあと 2 つで公差が 216 と 252 の場合のみ）でやはり，平方数を約数に持たない連続する項の個数が 24 である等差数列を作ることができる．

さて，それではそれ以上の項数つまり 25 以上の項数をもつ数列は作れないか調べてみよう．そのためには d は 900 の倍数である必要がある．この場合は次の 2 種類の数列以外には考えられない．

$$a_n = 900n - 690$$

$$a_n = 1800n - 1590$$

残念ながら，どちらの場合も条件を満たさない．前者の場合は a_{22} が 49 で割り切れ，後者は a_{15} が 121 で割り切れる．

（答）24

他の年号でも調べてみよう．ちなみに 2009 は平方数を素因数にもつので，この問題は成り立たない．

問題 2 2011 を含む各項が自然数の等差数列の中で，各項が平方数を約数に持たない有限数列を考える．このような数列の項数の最大値はいくらか．ただし，2011 は初項ではない．また公差は正とする．

[解] 2011 が素数なので，公差は p^2 について調べる必要はなく，p について調べればよい．よって，2010 の場合よりも大きい答を期待できる．それでは解いてみよう．$d = 2 \times 3 \times 5 \times 7 = 210$ の倍数である場合，平方数を約数に持たない連続する項の個数は $11^2 - 1 = 120$ 以下である．面倒なのでコンピュータの力を借りると

$$d = 210$$

のとき連続する項数は 62 でありこれが最大である．

定理 1 $(a,m)=1$ のとき，一次合同式

$$ax \equiv b \pmod{m} \tag{1}$$

は一つの解を有す．

[証明]　$(a,m)=1$ であるため，

$$0, a, 2a, \cdots, (m-1)a \tag{2}$$

は全て不合同である．なぜならば，(2) の元のうち，$ia \equiv ja$ とすると，$a(i-j) \equiv 0$ となり，$i=j$ 以外の場合がないからである．よって，(2) は m を法とする剰余系をなす．つまり (1) の b は (2) のどれかの数であり，x は対応する a の係数のいずれかである．つまり解は唯一である．　[証明おわり]

定理 2 $(a,m)=d$ のとき，一次合同式

$$ax \equiv b \pmod{m} \tag{3}$$

は b が d の倍数である場合に限って解をもつ．解の個数は d 個である．

[証明]　$a=a'd, m=m'd$ とすると，(3) は

$$a'dx \equiv b \pmod{m'd}$$

つまり，

$$a'dx - b = m'dk$$

とおける．

$$(a'x - m'k)d = b$$

より b は d の倍数でなければならない．$b=b'd$ とおくと，

$$(a'x - m'k)d = b'd$$

$$a'x - m'k = b'$$

つまり x は

$$a'x \equiv b' \pmod{m'} \tag{4}$$

の解であり，定理 3 より解を一つもつ．この解の個数は m' を法とした場合であって，m を法とした場合ではない．(4) の解を $x_0 (0 \leq x_0 < m')$ とすると，(3) を満たす解は

$$x_0, x_0+m', x_0+2m', \cdots, x_0+(d-1)m' (< m'd = m)$$

である．つまり d 個の解がある．　[証明おわり]

合同式

$$ax \equiv b \pmod{m}$$

を解く事は不定方程式

$$ax - my = b$$

を解く事と等しい．