二次無理数の対等と循環連分数展開

定義 1

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a, b, c \in \mathbb{Z}, (a, b, c) = 1)$$

において

$$D = b^2 - 4ac$$

が平方数でないとき，この方程式の解を**二次無理数**という．またこの方程式の二つの解

$$\theta = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, \theta' = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

を**共役**な二次無理数と呼ぶ．また D を $\theta(\theta')$ の**判別式**と呼ぶ．さらに，$\theta(\theta')$ を判別式 D に属する二次無理数と呼ぶ.

補題 1 θ が

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a, b, c \in \mathbb{Z}, (a, b, c) = 1) \tag{1}$$

の解であるならば二次無理数 θ を解とする整係数の二次方程式は

$$akx^2 + bkx + ck = 0 \quad (k \in \mathbb{Z})$$

のみである.

[証明] 二次無理数 θ が (1) 以外に整係数の二次方程式

$$a'\theta^2 + b'\theta + c' = 0$$

を満たすならば，$a' = ak$ と置いたとき，

$$a'\theta^2 + b'\theta + c' - k(a\theta^2 + b\theta + c) = (b' - bk)\theta + (c' - ck) = 0$$

$b' = bk$ でなければ θ が有理数となってしまうので，

$$a' = ak, b' = bk, c' = ck$$

と表され，それぞれが整数なので $k \in \mathbb{Z}$.（k が整数でない有理数では a', b', c' の全てを整数にすることができない.）
[証明おわり]

つまり (1) の解である二次無理数と同じ解をもつ整係数で，かつ各係数が互いに素の二次方程式は

$$-ax^2 - bx - c = 0$$

以外に無い.

定理 1 θ が

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a, b, c \in \mathbb{Z}, (a, b, c) = 1) \tag{2}$$

の解であるならば θ と対等な二次無理数 θ_1 の判別式は

$$D = b^2 - 4ac$$

である.

$$\theta_1 = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \theta, \begin{vmatrix} p & q \\ r & s \end{vmatrix} = \pm 1$$

とすると，

$$a\left(\frac{p\theta_1 + q}{r\theta_1 + s}\right)^2 + b\left(\frac{p\theta_1 + q}{r\theta_1 + s}\right) + c = 0$$

分母を払って整理した形を

$$A\theta_1^2 + B\theta_1 + C = 0 \tag{3}$$

とすると，

$$\begin{aligned} A &= cr^2 + bpr + ap^2 \\ B &= b\,(ps + qr) + 2crs + 2apq \\ C &= cs^2 + bqs + aq^2 \end{aligned}$$

ここで $A = 0$ であれば (3) は二次方程式にはならないが，もし $A = 0$ とすれば

$$a\left(\frac{p}{r}\right)^2 + b\left(\frac{p}{r}\right) + c = 0$$

となり，有理数 $\dfrac{p}{r}$ が (2) の解となり矛盾する．（$r = 0$ であれば $A \neq 0$ であることも明らか）

$$\begin{aligned} B^2 - 4AC &= (b\,(ps + qr) + 2crs + 2apq)^2 - 4\left(cr^2 + bpr + ap^2\right)\left(cs^2 + bqs + aq^2\right) \\ &= \left(b^2 - 4ac\right)p^2s^2 + \left(8ac - 2b^2\right)pqrs + \left(b^2 - 4ac\right)q^2r^2 \\ &= (b^2 - 4ac)(ps - qr)^2 \\ &= b^2 - 4ac \end{aligned}$$

ここで定理の証明を完成させるためには $(A, B, C) = 1$ を言っておかなくてはならない．θ_1 の判別式を D_1 とすると，θ_1 が実無理数のとき，

$$D_1 \leq D$$

となる．反対に θ_1 と θ を入れ替えて考えると，やはり対等なので，

$$D \leq D_1$$

よって

$$D = D_1$$

θ が虚数のときも同様に考えることができる．［証明おわり］

次にこのモジュラー変形により，共役な解が変形後の共役などちらの解と対等になっているのか調べてみよう．(2) の二つの解を

$$\theta = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, \theta' = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

(3) の解のうち，θ と対応しているものが θ_1,θ' と対応しているものが θ'_1 とすると，

$$\theta_1 = \frac{s\theta - q}{-r\theta + p}$$

$$
\begin{aligned}
\theta_1-\theta_1' &= \frac{s\theta-q}{-r\theta+p}-\frac{s\theta'-q}{-r\theta'+p} \\
&= \frac{(s\theta-q)(-r\theta'+p)-(-r\theta+p)(s\theta'-q)}{(-r\theta+p)(-r\theta'+p)} \\
&= \frac{\theta(ps-qr)-\theta'(ps-qr)}{p^2-rp(\theta+\theta')+r^2\theta\theta'} \\
&= \frac{(\theta-\theta')(ps-qr)}{p^2+\dfrac{brp}{a}+\dfrac{cr^2}{a}} \\
&= \frac{a(\theta-\theta')(ps-qr)}{p^2+brp+cr^2} \\
&= \frac{a(\theta-\theta')(ps-qr)}{A}
\end{aligned}
$$

$e=ps-qr=\pm1$ とおくと，

$$\theta_1-\theta_1'=\frac{ea(\theta-\theta')}{A}$$

よって

$$A(\theta-\theta')=e\sqrt{D}$$

よって

$$\theta_1=\frac{-B+e\sqrt{D}}{2A},\quad \theta_1'=\frac{-B+e\sqrt{D}}{2A}$$

以後実無理数のみを扱う．

二次方程式

$$ax^2+bx+c=0\quad (a,b,c\in\mathbb{Z},(a,b,c)=1)$$

の二つの実数解を θ,θ' とする．θ の連分数展開の終項を θ_n とすると，

$$\theta=\begin{pmatrix}P_{n-1} & P_{n-2}\\ Q_{n-1} & Q_{n-2}\end{pmatrix}\theta_n,\quad \theta'=\begin{pmatrix}P_{n-1} & P_{n-2}\\ Q_{n-1} & Q_{n-2}\end{pmatrix}\theta_n{}'$$

と置くことができ，n がある値以上ではつねに

$$\theta_n>1,\quad 0>\theta_n{}'>-1$$

となる．このような θ_n を**簡約された二次無理数**と呼ぶ．これらのことから次の定理が導かれる．

定理 2 判別式 D に属する二次無理数を連分数に展開すれば，ある番号以上の終項はすべて同じ判別式に属する簡約された二次無理数である．

定理 3 与えられた判別式 D に属する簡約された二次無理数の個数は有限である．

[証明]

quadθ を判別式 D に属する簡約された無理数として

$$a\theta^2+b\theta+c=0\quad (a,b,c\in\mathbb{Z},(a,b,c)=1),$$

$$\theta=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a},\quad \theta'=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$$

とすれば

$$\theta > 1, \quad 0 > \theta' > -1$$

から

$$\theta > \theta'$$

$$\therefore \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} > \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$$

$$\therefore a > 0$$

また

$$\theta + \theta' > 0, \quad \theta\theta' < 0$$

すなわち，

$$-\frac{b}{a} > 0, \quad \frac{c}{a} < 0$$

$$\therefore b < 0, \quad c < 0$$

$$\therefore b^2 = D + 4ac < D$$

$$\therefore -\sqrt{D} < b < 0$$

よって b は有限個である．$\theta > 1$ より

$$-b + \sqrt{D} > 2a$$

$$0 < a < \sqrt{D}$$

a も有界である．

$$4ac = b^2 - D$$

$$-D < 4ac < 0$$

$$\therefore -\frac{D}{4} < c < 0$$

c も有界である．よって，θ の連分数展開いおいて，終項は結局判別式 D に属する簡約された無理数のみとなり，それらは有限個である．よってついには同一の簡約された無理数として終項に現れる．同一の終項が現れたら，同じことを繰り返すのので，部分商は一定の周期をもって循環する．つまり次の定理が証明できたことになる．

定理 4 （ラグランジュの定理） 二次無理数は循環連分数に展開される．

定理 5 簡約された二次無理数は純循環連分数に展開される．

θ を簡約された二次無理数とし，θ の展開においてつぎつぎと出てくる終項を $\theta_0(=\theta), \theta_1, \theta_2, \cdots$ とし，

$$\theta_n = \theta_m (n < m)$$

とする．それぞれと共役な数についても当然

$$\theta_n{}' = \theta_m{}'$$

$n > 0$ において

$$\theta_{n-1}{}' = a_{n-1} + \frac{1}{\theta_n}{}'$$

$$\theta_{m-1}{}' = a_{m-1} + \frac{1}{\theta_m}{}'$$

辺々を引いて，

$$\theta_{n-1}{}' - \theta_{m-1}{}' = a_{n-1} - a_{m-1}$$

左辺は簡約された無理数の共役数どうしであるからその差は 1 より小さい．つまり右辺は 0 である．つまり

$$\theta_{n-1}{}' = \theta_{m-1}{}'$$

$$\therefore \theta_{n-1} = \theta_{m-1}$$

これを繰り返すと

$$\theta_0 = \theta_{m-n}$$

つまり最初から循環する． [証明おわり]

この定理の逆が次の定理である．

定理 6 純循環連分数は簡約された二次無理数に等しい．

[証明]

$$\theta = \begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \theta$$

$$\theta = \begin{pmatrix} P_n & P_{n-1} \\ Q_n & Q_{n-1} \end{pmatrix} \theta$$

$$Q_n \theta^2 + (Q_{n-1} - P_n)\theta - P_{n-1} = 0$$

左辺を $f(x)$ とおくと

$$f(0) = -P_{n-1} < 0$$

$$f(-1) = Q_n - Q_{n-1} + P_n - P_{n-1}$$

$$\begin{pmatrix} P_n \\ Q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{n-1}a_n + P_{n-2} \\ Q_{n-1}a_n + Q_{n-2} \end{pmatrix} \quad (n \geq 2)$$

$a_n > 1$ であるから

$$Q_n > Q_{n-1}, P_n > P_{n-1}$$

$$\therefore f(-1) > 0$$

よってこの二次方程式は区間 (-1,0) に一つ解をもち，それは θ の共役である．よって，θ は簡約された二次無理数である．

参考文献

[1] 高木貞治『初等整数論講義第 2 版』（共立出版社，1997 年）