ガウス整数における合同・偶数・奇数

定義 1 整数 μ, α, β について

$$\mu \mid (\alpha - \beta)$$

であるとき，α, β は μ **を法として合同**であるといい，

$$\alpha \equiv \beta \pmod{\mu}$$

と表す．

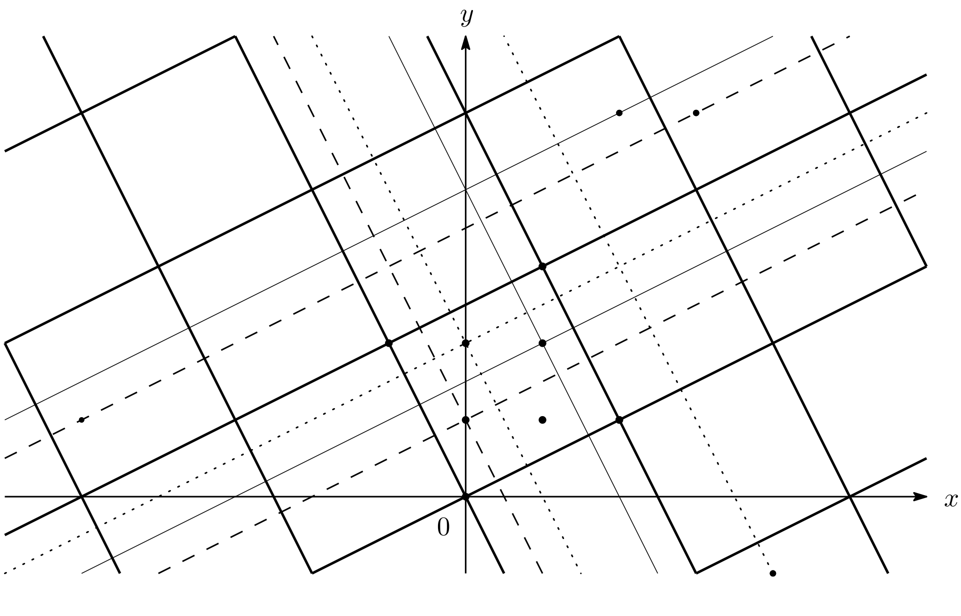
問題 1 $2+i$ を法として合同か合同でないか調べよ．

1. $4-i, 2+5i$
2. $3+5i, -5+i$

［解］

1. $\dfrac{4-i-(2+5i)}{2+i} = \dfrac{2-6i}{2+i} = \dfrac{-2-14i}{5}$ なので合同でない．
2. $\dfrac{3+5i-(-5+i)}{2+i} = \dfrac{8+4i}{2+i} = 4$ で合同．

このことは図で表すとわかりやすい，下の図で，同じ線種上にある格子点は全て合同である．



言い換えると，$2+i$ の合同類は全部で 5 つあることになる．これは 0 と $2+i$ を結ぶ線分を一辺とする正方形の面積つまり $N(2+i)$ に等しい．

定理 1 一般に μ を法とする合同類の個数は $N(\mu)$ である．

［証明略］

有理整数においては素数 2 は特別な存在であった．2 以外の有理素数を奇素数と呼ぶことも多い．また 2 を法とすることにより有理素数を偶数と奇数に大別することができた．ガウス整数においても同様の景観を示す．2 の約数である $1+i$ とその同伴数を λ と表すことにする．

定理 2 $a+bi$ が λ で割り切れるための必要十分条件は

$$a \equiv b \pmod 2$$

である．

［証明略］

定義 2 ガウス整数は λ で割り切れるか割り切れないかによって大別することができる．すなわち

$$\lambda \mid \alpha, \quad \lambda \nmid \beta$$

である．前者を**偶数**，後者を**奇数**と呼ぶ．これらは次のように書くこともできる．

$$\alpha \equiv 0, \beta \equiv 1 \pmod \lambda$$

有理整数において偶数を $2n$, 奇数を $2n+1$ などと表すことがあったが，同様にガウス整数においても，偶数, 奇数を次のように表すことができる．

$$\alpha = 2\mu + \lambda, \quad \beta = 2\mu + \epsilon$$

ここで μ は任意のガウス整数を表し，ϵ は単数を表す．

参考文献

[1] 高木貞治『初等整数論講義第 2 版』（共立出版社，1997 年）
[2] 芹沢正三『数論入門』（講談社ブルーバックス，2008 年）