ナイトの巡回問題に関連して

いわゆるナイトの巡回問題（騎士周遊問題，Knight's tour）とはチェス盤をナイトが全てのマスを周回できるかという問題である．その際同じマスは 1 回しか通れない．これを無限の盤にして，同じマスを通る回数に制限を加えないことにしてみよう．

問題 1 原点を出発した点 P は一回で $(\pm1,\pm2),(\pm2,\pm1)$（複合任意）のいずれかの移動を行う．P はすべての格子点に移動可能か．

［解］

$$(2,1)+(-2,1)+(1,-2)=(1,0)$$

より，P はとなりの点に移動可能である．同様に

$$(1,2)+(1,-2)+(-2,1)=(0,1)$$

である．全ての点は整数 m,n を用いて，一次結合

$$m(1,0)+n(0,1)$$

で表せるので，全ての点に移動可能である．

問題 2 原点を出発した点 P は一回で $(\pm a,\pm b),(\pm b,\pm a)$（複合任意）のいずれかの移動を行う．P がすべての格子点にたどり着けるような整数 a,b の条件を求めよ．

［解］次の条件は必要条件である．

条件 1: a,b は互いに素で，一方は偶数である．

［証明］ここから以降，最大公約数の表記と，ベクトルあるいは座標の表記が同じものを使う．前後関係でどちらを表しているか判断してほしい．

a,b が 1 以外の約数をもつと仮定する．

$$(a,b)=d$$

とすると，P は x 座標も y 座標も d の倍数以外に移動することができない．たとえば

$$(a,b)=(3,6)$$

であれば，最初図 1 の斜線部分からスタートすると，斜線部分でないマスには移動できない．

また，a,b の両方が奇数であると，x 座標と y 座標の和（差）が奇数である格子点には移動できない．（図 2 の斜線部分以外のマスには行けない）［証明おわり］

次に条件 1 が十分条件であることを証明する．

［証明］

$$a=2a',(a,b)=1$$

としたとき，P が点 $(0,1)$ にたどり着けるかどうか調べる．つまり連立一次不定方程式

$$x(a,b)+y(a,-b)+z(b,a)+w(b,-a)=(0,1)$$

分けてかくと，

$$\begin{cases} a(x+y)+b(z+w)=0 \\ a(z-w)+b(x-y)=1 \end{cases}$$

が整数解をもつかどうかを調べる．わかりやすいように

$$x+y=X, z+w=Z$$

と変数変換をし，

$$\begin{cases} aX+bZ=0 & (1) \\ a(Z-2w)+b(X-2y)=1 & (2) \end{cases}$$

としても一般性を失わない．$(a,b)=1$ なので，(1) は

$$X=bk, Z=-ak$$

と解け，これを (2) に代入すると，

$$a(-ak-2w)+b(bk-2y)=1$$
$$(b+a)(b-a)k-2aw-2by=1 \qquad (3)$$

となる．片方この場合 a が偶数で，b が奇数なので $(b+a)(b-a)$ は奇数である（因数 2 をもたない）．また

$$(b+a,a)=1$$

である．もし，1 以外の公約数 d をもつと

$$b+dt=du$$

とおけ

$$b=d(u-t)$$

となり，$(a,b)=1$ であることと矛盾する．同様に

$$(b+a,b)=(b-a,a)=(b-a,b)=1$$

である．よって後述の定理 1 により (3) は整数解をもつ．つまり P は (0,1) にたどり着くことができる．

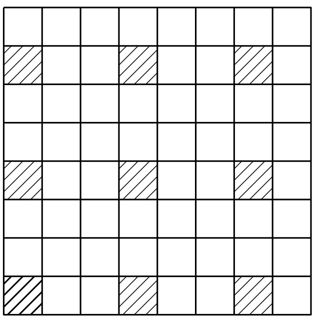

図 1

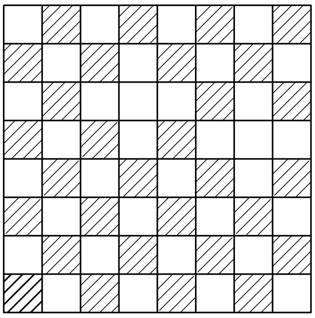

図 2

同様の手順で P が (1,0) にたどり着くことも言える．整数 m, n を用いて全ての格子点は (1,0),(0,1) の一次結合

$$m(1,0)+n(0,1)$$

で表せるので，P は全ての格子点にたどり着けることがわかる． ［証明おわり］

よって条件 1 が求める条件である．

定理 1 整数係数の三元一次不定方程式

$$ax+by+cz=k$$

が整数解をもつための条件は，

$$(a,b,c)\mid k$$

である．

［証明］整数の定数 a,b,c に対して集合 A を

$$A=\{ax+by+cz|x,y,z\in\mathbb{Z}\}$$

としたとき，

$$k_0,k_1\in A\Longrightarrow k_0-k_1\in A$$

である．なぜならば

$$k_0=ax_0+by_0+cz_0$$

$$k_1=ax_1+by_1+cz_1$$

としたとき，

$$k_0-k_1=a(x_0-x_1)+b(y_0-y_1)+c(z_0-z_1)\in A$$

であるからである．このことから，A の最小の正の要素を e とすると，A は e の倍数全体からなる集合である．もし e の倍数でない k_2 が要素だとすると，それに最も近い e の倍数である k_3 との差をとった場合，その差が A の要素となり，e が最小の正の要素であることと矛盾するからである．$d=(a,b,c)$ とすると，

$$da'x_q+db'y_q+dc'z_q=d(a'x_q+b'y_q+c'z_q)=e$$

とかける．つまり e は d の倍数

$$d\mid e \tag{4}$$

である．一方，a, b, c それぞれは単独で A の要素である．なぜなら，

$$a \times 1 + b \times 0 + c \times 0$$

などとかけるからである．つまり a, b, c は e の倍数である．言い換えると e は a, b, c の公約数である．つまり

$$e \mid d \tag{5}$$

である．(4),(5) より

$$e = d$$

である．よって定理は証明された．［証明おわり］

とくに 整数係数の三元一次不定方程式

$$ax + by + cz = 1$$

が整数解をもつための条件は，

$$\underline{(a, b, c) = 1}$$

である．

3 次元の場合について考えてみよう．二次元のときと同じように，

補題 1 $(a, b, c) = 1$ でかつ a, b, c のうち偶数個が偶数であることは必要条件である．

［証明］a, b, c が 1 以外の公約数をもてばその公約数の倍数以外の座標をとりえないのでこれは必要条件である．また偶数が奇数個（実際は 1 個．もし 3 個あれば公約数 2 をもつことになる）あれば，$a + b + c$ は偶数なので，x, y, z 座標の和が奇数の格子点に行き着くことができないので，これも必要条件である．［証明おわり］

補題 2 a, b, c 全てが奇数の場合は全ての点に行き着くことはできない．

［証明］a, b, c 全てが奇数の場合，座標 0 を作るには偶数個の $(\pm a, \pm b, \pm c), (\pm a, \pm c, \pm b), \cdots (\pm c, \pm b, \pm a)$（複合任意）の和が必要である．よって，たとえば (0, 奇数, 奇数) というような座標を作りえない．よって題意は証明された．［証明おわり］

補題 1,2 より

条件 2: $(a, b, c) = 1$ でかつ a, b, c のうち 2 個が偶数である

ことは必要条件である．この条件が十分条件でもあることを証明してみよう．

［証明］a, b を偶数，c を奇数とする．

$$(a, b, c) + (a, -b, -c) = (2a, 0, 0)$$

同様に $(0, 2a, 0)$ や $(0, 0, 2a)$ にも移動しうる点である．よって $2a$ の倍数を座標にもつ全ての点

$$(2ax_1, 2ay_1, 2az_1)$$

に移動しうる（x_1, y_1, z_1 は任意の整数）．同様に

$$(2bx_2, 2by_2, 2bz_2), (2cx_3, 2cy_3, 2cz_3)$$

に移動できる．よってこれらの移動を組み合わせることによって，各座標が，

$$2ax + 2by + 2cz \tag{6}$$

で表せる全ての整数値をとりうる．

$$(2a, 2b, 2c) = 2$$

であるから定理 1 により (6) がとりうる整数値は 2 の倍数である．つまりこれらの移動により，偶数値を座標にもつ全ての格子点に移動可能である．

さて，$(a, b, c+1)$ は各座標が偶数なので移動しうる点である．一方 (a, b, c) も当然移動しうる．この二つの点は隣同士である．つまり

$$(0, 0, 1)$$

という移動が可能であるということである．同様に

$$(1, 0, 0), (0, 1, 0)$$

も可能なので，これらの一次結合で表される格子点，つまり全ての格子点に移動可能である．　［証明おわり］
よって 3 次元の場合に全ての格子点に移動するための必要十分条件は前述の条件 2 である．

以上のことから，n 次元まで拡張ができる．

条件 3: $(a, b, c, \cdots) = 1$ **でかつ** $a, b, c, \cdots$ **のうち奇数個が奇数である．ただし，全て奇数である場合を除く．**

が n 次元の場合の必要十分条件である．必要性は 3 次元の場合と同じように証明できる．十分性は次のように証明する．

概略を示すと，$a, b, c, \cdots$ のうち奇数個（この場合 n 個とする．全て奇数である場合を除く）が奇数であるから，3 次元の場合と同様にして，

$$(\underbrace{1, 1, 1, \cdots, 1}_{n\text{ 個}}, 0, 0, 0, \cdots, 0) \tag{7}$$

という移動が可能である．これら n 個の座標が 1 で残りが 0 の移動ベクトルを二つ組み合わせて，

$$(1, 1, 0, 0, 0, \cdots, 0)$$

という移動を表すベクトルが作れる．さらに，任意の偶数個の座標が 1 で残りが 0 の移動ベクトルもつくれて，これらと (7) の種類を適当に組み合わせると，

$$(1, 0, 0, 0, 0, \cdots, 0)$$

がつくれる．よって，全ての格子点に移動可能となる．