ペル方程式を連分数展開で解く

補題 1 D を平方数でない自然数とする．$\sqrt{D}$ はただ一度の連分数展開により簡約された二次無理数となる．

[証明]

$$\sqrt{D} = a_0 + \frac{1}{\theta_1}$$

とおくと，

$$\theta_1 > 1$$

$$\theta_1 = \frac{1}{\sqrt{D} - a_0}$$

共役な無理数 ${\theta_1}'$ は

$${\theta_1}' = \frac{1}{-\sqrt{D} - a_0} = -\frac{1}{\sqrt{D} + a_0}$$

分母は 1 より大きいので，

$$-1 < {\theta_1}' < 0$$

[証明おわり]

定理 1 D を平方数でない自然数とする．$\sqrt{D}$ を連分数展開したときの循環節の長さを k とする．

1. k が奇数のとき
   (a) 偶数 m に対して (P_{mk-1}, Q_{mk-1}) は $x^2 - Dy^2 = 1$ の解
   (b) 奇数 m に対して (P_{mk-1}, Q_{mk-1}) は $x^2 - Dy^2 = -1$ の解
2. k が偶数のとき
   (a) 整数 m に対して (P_{mk-1}, Q_{mk-1}) は $x^2 - Dy^2 = 1$ の解
   (b) $x^2 - Dy^2 = -1$ の解はない

[証明]　補題 1 より $\sqrt{D}$ の連分数展開は第二回目から循環が始まる．

$$\begin{aligned}
\sqrt{D} &= \begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \theta_1 \\
&= \begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \theta_{n+1} \\
&= \begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \theta_1 \\
&= \begin{pmatrix} P_k & P_{k-1} \\ Q_k & Q_{k-1} \end{pmatrix} \theta_1 = \begin{pmatrix} P_{2k} & P_{2k-1} \\ Q_{2k} & Q_{2k-1} \end{pmatrix} \theta_1 = \cdots = \begin{pmatrix} P_{mk} & P_{mk-1} \\ Q_{mk} & Q_{mk-1} \end{pmatrix} \theta_1
\end{aligned}$$

ただし

$$\begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}^m = \begin{pmatrix} P_{mk} & P_{mk-1} \\ Q_{mk} & Q_{mk-1} \end{pmatrix}$$

$\sqrt{D} = \begin{pmatrix} P_{mk} & P_{mk-1} \\ Q_{mk} & Q_{mk-1} \end{pmatrix} \theta_1$ に $\theta_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -a_0 \end{pmatrix} \sqrt{D}$ を代入すると

$$\sqrt{D} = \begin{pmatrix} P_{mk-1} & P_{mk} - a_0 P_{mk-1} \\ Q_{mk-1} & Q_{mk} - a_0 Q_{mk-1} \end{pmatrix} \sqrt{D}$$

一般にモジュラー変形によって $\sqrt{D}$ が自分自身に移るとき

$$\sqrt{D}=\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}\sqrt{D}$$

と表せる．つまり

$$\sqrt{D}=\frac{p\sqrt{D}+q}{r\sqrt{D}+s}$$

$$rD+s\sqrt{D}=p\sqrt{D}+q$$

$$rD+(s-p)\sqrt{D}-q=0$$

$$\therefore \quad rD=q, s=p$$

$$\therefore \quad p^2-r^2D=ps-qr=\begin{vmatrix} p & q \\ r & s \end{vmatrix}=\pm 1$$

よって (P_{mk-1}, Q_{mk-1}) はペル方程式 $x^2-Dy^2=\pm 1$ のどちらかを満たしているのだが，k が奇数の場合と偶数の場合とで定理に示したような分類となるわけである． [証明おわり]

問題 1 $2009x$ も $2009+x$ も平方数となるような自然数 x のうち最小のものを求めよ．

[解]　文字は全て自然数とする． $2009=7^2\cdot 41$ なので，

$$7^2\cdot 41x=n^2$$

とおける．x は 41 を因数にもつので，

$$x=41m^2$$

とおける．これを

$$2009+x=l^2$$

に代入すると，

$$7^2\cdot 41+41m^2=l^2$$

$$41(7^2+m^2)=l^2$$

7^2+m^2 は 41 を因数にもつので，

$$7^2+m^2=41k^2$$

$$41k^2-m^2=7^2 \tag{1}$$

$$-k^2-m^2\equiv 0 \pmod 7$$

$$k^2+m^2\equiv 0 \pmod 7$$

$$a^2\equiv 0,1,2,4 \pmod 7$$

であるから

$$k\equiv m\equiv 0 \pmod 7$$

$k=7i, m=7j$ とおくと (1) は

$$41k^2-m^2=7^2$$

$$j^2-41i^2=-1$$

ここからペル方程式となる．

$$\begin{aligned}
\sqrt{41} &= \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \left(\frac{6+\sqrt{41}}{5}\right) \\
&= \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \left(\frac{4+\sqrt{41}}{5}\right) \\
&= \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \left(6+\sqrt{41}\right) \\
&= \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \left(\frac{6+\sqrt{41}}{5}\right) \\
&= \begin{pmatrix} 397 & 32 \\ 62 & 5 \end{pmatrix} \left(\frac{6+\sqrt{41}}{5}\right)
\end{aligned}$$

つまり連分数展開の循環節の長さは 3 つまり奇数であるので，この方程式の解は存在し，その最小解は，

$$i=5, j=32$$

である．この解を順次あてはめてゆくと，

$$k=35, m=224$$

$$x=2057216$$

である．検算をすると，

$$\sqrt{2009+2057216}=1435$$

$$\sqrt{2009\cdot 2057216}=64288$$

である．この問題の $x+2009$ のところを $x-2009$ としてもやはりペル方程式になるが，この解の次の解になる．つまり $j=2049, m=14343, x=8434587609$ となるので，かなり大きな数である．電卓の力を借りても，おそらくペル方程式の知識が無いと解けないであろう．

問題 2

$$1+2+3+\cdots+n$$

が平方数になるような n を求めよ．

[解]

$$\frac{n(n+1)}{2}=y^2$$

とおくと

$$4n^2+4n=8y^2$$

$$(2n+1)^2-1=8y^2$$

$x=2n+1$ とおくと，ペル方程式

$$x^2-8y^2=1 \tag{2}$$

となる．(2) は x が偶数となる解を持たないので (2) の解が n の全ての解を与える．この方程式は容易に解け，連分数を用いるまでもないのだが，あえて練習を兼ねて行うと，

$$
\begin{aligned}
2\sqrt{2} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{2}}{2} \right) \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \left(2+2\sqrt{2} \right) \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{2}}{2} \right) \\
&= \begin{pmatrix} 14 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{2}}{2} \right)
\end{aligned}
$$

よって最小解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

一般解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^m \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

（中略）

$$x = \frac{(3+2\sqrt{2})^m + (3+2\sqrt{2})^m}{2}$$

$$\therefore n = \frac{(3+2\sqrt{2})^m + (3+2\sqrt{2})^m - 2}{4} = 1, 8, 99, 577, 3363, \cdots$$

参考文献

[1] 高木貞治『初等整数論講義第 2 版』（共立出版社，1997 年）