$x^4+y^4=z^4$ の不可能性

有名なフェルマーの最終定理の $n=4$ の場合は，フェルマー自身によって 1640 年に証明された．それがどのようなものかは正確にはわからないが，初等的に証明してみよう．あつかう文字は自然数とする．

条件を次のように緩くしてもやはり不可能である．

定理 1 $x^4+y^4=z^2$ をみたす自然数 x,y,z は存在しない．

［証明］x,y は互いに素と考えて差し支えない．もし公約数 $d(\neq 1)$ を持ち，$x^4+y^4=z^2$ が成り立てば，$x'^4d^4+y'^4d^4=z^2$ となり $z=z'd^2$ と，公約数をもつことになり x',y',z' でも成り立つからである．よって x,y がともに偶数であるということもないとしてかまわない．

補題 1 x,y がともに奇数のとき，$x^4+y^4=z^2$ をみたす自然数 x,y,z は存在しない．

［証明］$x=2s+1,y=2t+1$ とすると，

$$x^4+y^4=8\left(2\,t^4+4\,t^3+3\,t^2+t+2\,s^4+4\,s^3+3\,s^2+s\right)+2\equiv 2(mod4)$$

となるが z は必ず偶数で z^2 は 4 の倍数であるから，x^4+y^4 と z^2 が等しくなることは無い．　「証明おわり」

補題 2 x が偶数，y が奇数で互いに素であるとき，$x^4+y^4=z^2$ をみたす自然数 x,y,z は存在しない．

［証明］このような自然数 x,y,z が存在すると仮定する．

x,z が公約数として素数 p をもつとすると，$x'^4p^4+y^4=z'p^2$ となり $y^4=p^2(z'^2-a'^4p^2)$ となるので y も約数 p を持たなければならず，x,y が互いに素である仮定と矛盾するので，$(x,z)=1$ である．

次に，$y^4=(z+x^2)(z-x^2)$ とおくと後述の補題 3 より $z+x^2,z-x^2$ は互いに素．後述の補題 5 より互いに素である自然数 m,n を用いて，

$$z+x^2=m^4,z-x^2=n^4 \tag{1}$$

と表せる．また x は偶数，z は奇数なので m,n はともに奇数．よって $m+n,m-n$ はともに偶数．よって

$$m+n=2a,m-n=2b$$

とおくと，(1) より

$$2x^2=m^4-n^4=(m^2+n^2)(m+n)(m-n)=8(a^2+b^2)ab$$

$$\therefore x^2=4(a^2+b^2)ab \tag{2}$$

x は偶数なので

$$(a^2+b^2)ab=k^2$$

とおける．後述補題 4 および補題 5 の［補足］より

$$a^2+b^2=z'^2,a=x'^2,b=y'^2$$

とおけ

$$x'^4+y'^4=z'^2$$

である．補題 1 より x', y' の一方は偶数であるので x' を偶数としてかまわない．また (2) より，

$$x = 2x'y'z'$$

で，x' は x の約数であり $x > x'$ である．よって $x^4 + y^4 = z^2$ を満たす偶数 x からそれより小さい x' が必ず生成されこれを続けると，無限に自然数が存在することになる．そのようなことは無いのでこの補題は証明された．［証明終わり］

補題 1,2 によりこの定理は証明された．［証明終わり］

補題 3 自然数 a, b について $(2a, b) = 1$ のとき $(2a + b, 2a - b) = 1$ である．

［証明］$2a + b = dA, 2a - b = dB$ とおくと，$4a = d(A + B), 2b = d(A - B)$ d は $(4a, 2b) = 2$ の約数である．しかし b は奇数なので dA, dB も奇数．よって d は 2 になりえない．よって $d = 1$．「証明おわり」

補題 4 $(a, b) = 1$ のとき $(a^2 + b^2, a) = (a^2 + b^2, b) = 1$

［証明］$a = da', a^2 + b^2 = dA$ とすると，

$$d^2a'^2 + b^2 = dA$$

$$b^2 = d(A - da'^2)$$

$(a, b) = 1$ より，$d = 1$．同様に $(a^2 + b^2, b) = 1$ ［証明おわり］

補題 5 自然数 a, b について $(a, b) = 1, ab = c^4$ であるとき，$a = e^4, b = f^4$ と表せ，$(e, f) = 1$ である．

［証明］$(a, b) = 1$ であるので a の素因数で b の約数であるものはない．b の素因数で a の約数であるものもない．c を素因数のうち a の約数であるものの積を $e = p_1p_2p_3\cdots$ とする．c を素因数のうち b の約数であるものの積を $f = q_1q_2q_3\cdots$ とすると，当然 $(e, f) = 1$ である．$a = e^4, b = f^4$ であることもほぼ自明である．
「証明おわり」

［補足］同様の考え方により $(A, B) = (B, C) = (C, A) = 1$ で $ABC = N^2$ と表せるとき A, B, C も平方数である．

ピタゴラス数の一般解を既知として解けば多少簡略化できると思われる．