合同式に関する練習問題

問題 1 x, y が整数のとき，$2x+3y$ が 17 の倍数であることと，$9x+5y$ が 17 の倍数であることは同値である．
（第 1 回オトボス・コンテスト 1894 年）

[解]

$$2x+3y \equiv 0 \pmod{17} \tag{1}$$

であるとき

$$9x+5y \equiv k \pmod{17} \tag{2}$$

とおく．(1) $\times 9 -$ (2) $\times 2$ より

$$17y \equiv -2k$$
$$\therefore k \equiv 0$$

逆に

$$9x+5y \equiv 0 \pmod{17} \tag{3}$$

であるとき

$$2x+3y \equiv l \pmod{17} \tag{4}$$

とおく．(1) $\times 2 -$ (2) $\times 9$ より

$$-17y \equiv -9l$$
$$\therefore l \equiv 0$$

[証明おわり]

問題 2 n が奇数のとき，$46^n + 296 \cdot 13^n$ は 1947 の倍数であることを証明せよ．
（第 1 回クルシャーク・コンテスト 1947 年）

[解]

$$1947 = 3 \cdot 11 \cdot 59$$

$$46^n + 296 \cdot 13^n \equiv 1^n - 1^n \equiv 0 \pmod{3}$$
$$46^n + 296 \cdot 13^n \equiv 2^n - 2^n \equiv 0 \pmod{11}$$

n は奇数なので

$$46^n + 296 \cdot 13^n \equiv (-13)^n + 13^n \equiv 0 \pmod{59}$$

[証明おわり]

参考文献

[1] 安藤哲哉『世界の数学オリンピック」（日本評論社，2003 年）