楕円

定理 1 直交する 2 直線 $ax+by+c=0, bx-ay+c'=0$ を長軸，短軸とする楕円は

$$\frac{(ax+by+c)^2}{A^2}+\frac{(bx-ay+c')^2}{B^2}=1$$

とかける．

[証明] ある合同変換 f があって，

$$ax+by \xrightarrow{f} px$$
$$bx-ay \xrightarrow{f} qy$$

とすることができれば，証明ができたことになる．今, 回転行列

$$F=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

を考え,

$$F\begin{pmatrix}a & b \\ b & -a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p & 0 \\ 0 & q\end{pmatrix} \tag{1}$$

となる F が存在するかどうかしらべる．(1) より,

$$\begin{cases} a\cos\theta+b\sin\theta=p & (2) \\ b\cos\theta-a\sin\theta=0 & (3) \\ -a\sin\theta+b\cos\theta=0 & (4) \\ -b\sin\theta-a\cos\theta=q & (5) \end{cases}$$

(2),(3),(4),(5) より

$$p=q \tag{6}$$
$$\tan\theta=\frac{b}{a} \tag{7}$$

(7) を満たす θ について F が存在する．よって題意は証明された．

これと同様に直線 $ax+by+c=0$ を軸に持ち，頂点を通り軸と垂直な直線の方程式が $bx-ay+c'=0$ であるような放物線の方程式は

$$ax+by+c=A(bx-ay+c')2$$

とかける．