並列共振回路についての考察

並列共振回路の共振周波数は一般に $f = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ とされているが，インダクタンスに直列に抵抗が加わるとその周波数はわずかにずれることは意外に知られていない．このことについて考察する．

図 1 のようにインダクタンスと直列に抵抗が入る場合は一般的である．このときのインピーダンス Z について調べる．なお，計算式中に出てくる虚数単位は j を用いている．また ω は角速度つまり $2\pi f$(f は周波数) を表す．

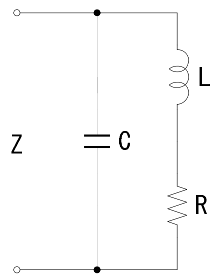

図 1

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{Z} &= \frac{1}{R+\omega jL} + \omega jC \\
&= \frac{1+\omega jCR - \omega^2 CL}{R+\omega jL} \\
&= \frac{(1-\omega^2 CL) + \omega jCR}{R+\omega jL} \\
\frac{1}{|Z|^2} &= \frac{(1-\omega^2 CL)^2 + \omega^2 C^2 R^2}{R^2+\omega^2 L^2}
\end{aligned}
$$

$Z = \dfrac{1}{|Z|^2}$ とすると

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial Z}{\partial C} &= \frac{2(1-\omega^2 CL)(-\omega^2 L) + 2\omega^2 CR^2}{R^2+\omega^2 L^2} \\
&= \frac{2(1-\omega^2 CL)(-\omega^2 L) + 2\omega^2 CR^2}{R^2+\omega^2 L^2} \\
&= \frac{2(\omega^4 CL^2 - \omega^2 L) + \omega^2 CR^2}{R^2+\omega^2 L^2} \\
&= \frac{2\omega^2(\omega^2 CL^2 - L + CR^2)}{R^2+\omega^2 L^2}
\end{aligned}
$$

$\dfrac{\partial Z}{\partial C} = 0$ となるとき Z は最小，つまり $|Z|$ は最大となる．
$\dfrac{\partial Z}{\partial C} = 0$ となるのは

$$\omega^2 CL^2 - L + CR^2 = 0$$

$$\omega^2 CL^2 = L - CR^2$$

$$\omega^2 = \frac{L - CR^2}{CL^2}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{CL} - \frac{R^2}{L^2}}$$

$$\therefore \quad f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{CL} - \frac{R^2}{L^2}} \tag{1}$$

ここで Z の虚数部分が無い場合，つまり実数になる場合，言い換えると回路全体が純抵抗となるときについて調べる．Z が実数になる場合は $\dfrac{1}{Z}$ も実数である．

$$\begin{aligned}\frac{1}{Z} &= \frac{1}{R+\omega jL} + \omega jC \\ &= \frac{R-\omega jL}{R^2+\omega^2 L^2} + \omega jC\end{aligned}$$

虚数部分を $j\alpha$ とすると

$$\begin{aligned}j\alpha &= -\frac{\omega jL}{R^2+\omega^2L^2} + \omega jC \\ \alpha &= -\frac{\omega L}{R^2+\omega^2L^2} + \omega C\end{aligned}$$

$\alpha = 0$ とすると

$$\begin{aligned}\omega C(R^2+\omega^2L^2) - \omega L &= 0 \\ C(R^2+\omega^2L^2) - L &= 0 \\ CR^2 + \omega^2 CL^2 &= L \\ \omega^2 CL^2 &= L - CR^2 \\ \omega^2 &= \frac{L-CR^2}{CL^2} \qquad (2) \\ \omega &= \sqrt{\frac{1}{CL} - \frac{R^2}{L^2}} \\ f &= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{CL} - \frac{R^2}{L^2}} \qquad (3)\end{aligned}$$

(1),(3) は一致する．つまり $\sqrt{\ }$ の中の $\left(\dfrac{R}{L}\right)^2$ 分だけ共振周波数は低くずれる．

このとき Z は実数となり

$$\begin{aligned}\frac{1}{Z} &= \frac{R}{R^2+\omega^2L^2} \\ Z &= R + \frac{\omega^2L^2}{R} \qquad (4)\end{aligned}$$

(4) に (2) を代入すると

$$\begin{aligned}Z &= R + \frac{L^2}{R} \times \frac{L-CR^2}{CL^2} \\ &= R + \frac{L-CR^2}{CR} \\ &= R + \frac{L}{CR} - R \\ &= \frac{L}{CR}\end{aligned}$$

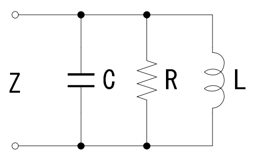

図 2

次に LC と並列に抵抗が入った場合について考える．これは先ほどの L に直列に R が入った場合と違って意図的に抵抗を加えないとこのようなことは通常起こらない．この場合についてのインピーダンスを調べると

$$\begin{aligned} \frac{1}{Z} &= \frac{1}{R} + \frac{1}{\omega jL} + \omega jC \\ &= \frac{1}{R} - \frac{j}{\omega L} + \omega jC \end{aligned}$$

$$\frac{1}{|Z|^2} = \left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2$$

$\omega^2 = \dfrac{1}{CL}$ のとき $|Z|$ は最大かつ Z は純抵抗

$$Z = R$$

となる．つまりこの場合は共振周波数はずれることはない．