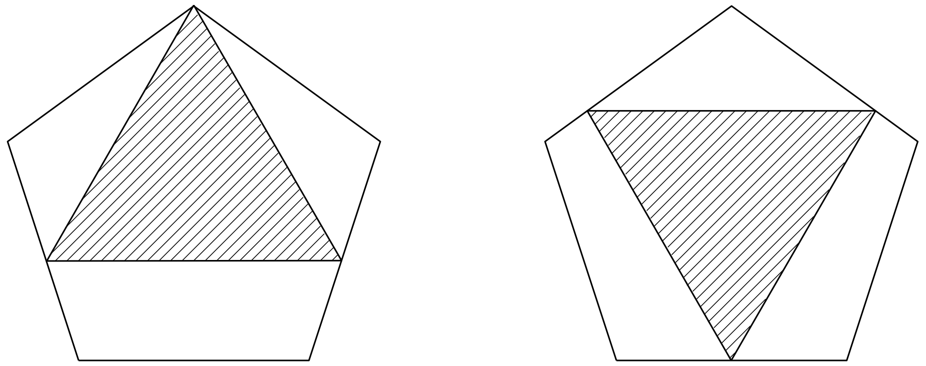
正五角形に内接する正三角形

定理 1 正五角形の辺上の任意の点 P を一つの頂点とし，なおかつその正方形に内接する正三角形は必ずかけ，その正三角形は P について唯一である．

[証明略]

三角形の 1 頂点が五角形の頂点上に来る場合（図 1A）と，五角形の辺の中点上に来る場合（図 1B）は作図が可能であることは容易に言える．しかしそれ以外の場合でも正五角形に内接する正三角形は必ずかける．



A　　　B

図 1

正三角形に切り取られた外側の部分は一つの三角形と二つの四角形である．（ただし，正三角形の頂点が正五角形の頂点に重なる場合（図 1A）は三角形二つと等脚台形一つである．）

定理 2 正五角形が，それに内接する正三角形に切り取られてできる三角形の 180° を挟む二辺の長さの積 α は一定である．

[証明略]

正五角形の一辺の長さを 1 とすると，

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \frac{1}{2\cos 24^\circ} + 1 \\
&= \frac{3g + 1 + \sqrt{3g\sqrt{5}}}{g + 1 + \sqrt{3g\sqrt{5}}} \\
&= \frac{8\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}}{\sqrt{2}\left(\sqrt{5} - 1\right)\sqrt{5 + \sqrt{5}} + 2\sqrt{3}\left(\sqrt{5} + 1\right)} \\
&\simeq 1.54761839
\end{aligned}
$$

なお，式中に使われた g はいわゆる黄金比つまり，

$$g = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

である．

この三角形の 180° を挟む二辺のうち一辺の長さを x としたとき，内接正三角形の一辺の長さの平方 l^2 は x の二次関数で表され，

$$l^2 = 2(1+\cos 108^\circ)(x-\alpha)x+\alpha^2$$

となる．さらに内接正三角形の面積 S は，

$$S = \frac{\sqrt{3}(2(1+\cos 108^\circ)(x-\alpha)x+\alpha^2)}{4} \qquad (\alpha-1 \le x \le 1)$$

となる．その最大値は，

$$\frac{3}{4}\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}(1-\alpha)+\alpha^2\right) \simeq 0.7091961525$$

これは $x=\alpha-1, 1$ のとき，つまり内接正三角形の一つの頂点が正五角形の頂点に重なるときである（図 1A)．

最小値は，

$$\frac{\sqrt{3}\,(3+\sqrt{5})\,\alpha^2}{32} \simeq 0.6785395379$$

これは $x=\dfrac{\alpha}{2}$ のとき，つまり内接正三角形の一つの頂点が正五角形の辺の中点にあるときで，切り取られる外側の三角形は二等辺三角形である．

正五角形の面積が，

$$\frac{\sqrt{5}\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{4} \simeq 1.7204774$$

であるから，内接正三角形の最大面積は正五角形に対して 41% ，最小面積は 39% であり，その変化は少ない．

正五角形に内接する正三角形の作図法

(1) 正五角形 ABCDE の辺 CD 上に点 F をとる．その際，∠ EAF=60 ° となるようにする．この線分 AF の長さが前述のαに相当する．
(2) 点 AE 上に内接正三角形の頂点とすべき点 P をとる．その際 P は点 A よりも点 E により近いものとする．
(3) 線分 AF 上に点 H をとる．その際，AH=AP となるようにする．つまり△ APH は正三角形である．
(4) 線分 DF 上に点 I をとる．その際，HF=HI となるようにする．つまり△ HFI は二等辺三角形である．
(5) 辺 AB 上に点 J をとる．その際，∠ IPJ=60 ° となるようにする．または PI=PJ となるようにしてもよい．このとき点 J が辺 AB 上にとれないときは後述する．△ APJ ≡△ HPI であるから，△ IPJ は正三角形である．
(6) 点 J が辺 AB 上にとれない場合は，点 P が辺 AE の中点に近い場合である．どのくらい近いとそうなるかは，前述の計算結果を参考にする．（中点から 0.0447318139 より近いとそうなる．ただし，正五角形の一辺の長さは 1 とする）その場合は，点 P は切り取られる外側の三角形の頂点とはなりえないの

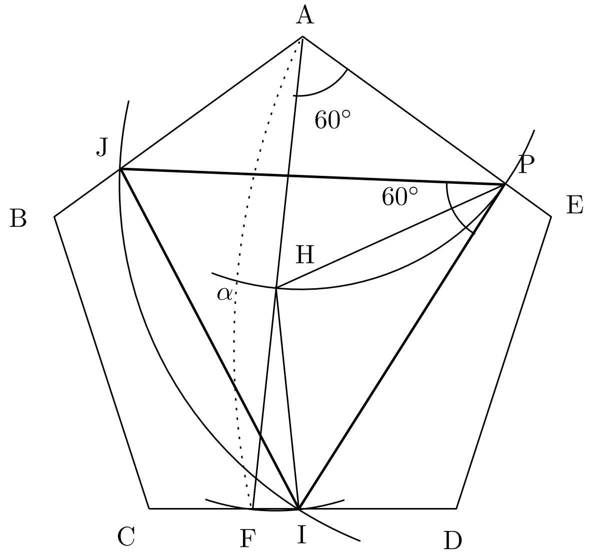


図 2

で（内接正三角形の頂点となりえないという意味ではない），EP=DI となるように点 I を置き，やり直す．その後この点 P は消す．線分 AF は前述と同じように引いておく．

(7) HF=HI となるように点 H をとる．

(8) AH=AP となるように点 P をとる．

(9) ∠ IPJ=60 ° となるように点 J をとる．または PI=PJ となるようにしてもよい．以下同様.

これで，内接正三角形がかけるが，ある一頂点について，ほかに内接正三角形がかけない，つまり唯一であることを言わなければならないが，ここでは省略する．