完全数

「カンゼン、数」
揺るぎない言葉の響きを味わうように、私はつぶやいた。
「一番小さな完全数は 6。$6 = 1 + 2 + 3$」
「あっ、本当だ。別に珍しくないんですね」
「いいや、とんでもない。完全の意味を真に体現する、貴重な数字だよ。28 の次は 496。$496 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248$。その次は 8128。その次は 33550336。次は 8589869056。数が大きくなればなるほど、完全数を見つけるのはどんどん難しくなる」
億の桁の数字を博士が苦もなく導き出してくるのに、私は驚いた。

（小川洋子「博士の愛した数式」（新潮社）より引用）

「博士の愛した数式」には完全数に関する話がいくつか出てくる．阪神タイガースの江夏の背番号が 28 で完全数であったこともその一つである．

定義 1 整数 a の約数 (1 を入れて a 自身を入れない) の和が a に等しいとき a を完全数と呼ぶ.

補題 1 a が

$$a = p^{\alpha} q^{\beta} r^{\gamma} \cdots$$

と素因数分解できるとき，a のすべての約数 (a 自信を入れる) の和を $S(a)$ とすると,

$$S(a) = \frac{p^{\alpha+1}-1}{p-1} \cdot \frac{q^{\beta+1}-1}{q-1} \cdot \frac{r^{\gamma+1}-1}{r-1} \cdots$$

である.

[証明]

$$\begin{aligned} S(a) &= (1 + p + p^2 + \cdots + p^{\alpha})(1 + q + q^2 + \cdots + q^{\beta})(1 + r + r^2 + \cdots + r^{\gamma}) \cdots \\ &= \frac{p^{\alpha+1}-1}{p-1} \cdot \frac{q^{\beta+1}-1}{q-1} \cdot \frac{r^{\gamma+1}-1}{r-1} \cdots \end{aligned}$$

[証明おわり]

補題 2 a, b が互いに素であるとき,

$$S(ab) = S(a)S(b)$$

[証明] 補題 1 より a, b はそれぞれ ab の素因数分解の一部分に対応しているわけで，当然成り立つ.

[証明おわり]

この $S(a)$ という表し方を用いれば，a が完全数であることは

$$S(a) = 2a$$

であることと同値である.

定理 1

$$a = 2^{n-1}(2^n - 1) \quad (n > 1)$$

において 2^n-1 が素数ならば，すなわちメルセンヌ素数ならば，a は完全数である．

[証明] 補題 1 より

$$\begin{aligned} S(a) &= \frac{2^n-1}{2-1}(1+2^n-1) \\ &= 2^n(2^n-1) \\ &= 2a \end{aligned}$$

[証明おわり]

定理 2 a が偶数の完全数ならば

$$a = 2^{n-1}(2^n-1) \quad (n>1)$$

と表せ，2^n-1 はメルセンヌ素数である．

[証明]

$$a = 2^{n-1}b \quad (n>1)$$

とおくと

$$S(a) = 2a$$

であるから，補題 1,2 より

$$(2^n-1)S(b) = 2^n b$$

$$S(b) = b + \frac{b}{2^n-1}$$

$S(a)$ は整数なので $\frac{b}{2^n-1}$ も整数である．よって

$$S(a) = b + c$$

と表せる．つまり $S(a)$ はただ 2 つの約数の和である．つまり $c=1$ である．

$$\therefore b = 2^n-1$$

また b は素数でなければならない． [証明おわり]

現在奇数の完全数は見つかっていない．しかし奇数の完全数が無いという証明もされていない．いまのところ完全数はメルセンヌ素数と 1 対 1 に対応している．最初の六つは $a = 6, 28, 496, 8128, 33550336, 8589869056$ である．

$S(a) > 2a$ となる a を豊数 (abundant number),$S(a) < 2a$ となる a を輸数 (deficient number) とも言う．（過剰数，不足数という呼び方もある．）

冒頭で引用した「博士の愛した数式」は最後も完全数で締めくくられている．

背景は暗く、観客もスコアボードも闇に沈み、江夏はただ一人が光に浮かび上がっている。今まさに、左手を振り下ろした瞬間だ。右足はしっかりと土をつかみ、ひさしの奥の目は、キャッチャーミットに吸い込まれ

てゆくボールを見つめている。マウンドに漂う土煙の名残が、ボールの威力を物語っている。生涯で最も速い球を投げていた江夏だ。縦縞のユニフォームの肩越しに背番号が見える。完全数、28。

参考文献

[1] 小川洋子『博士の愛した数式』（新潮文庫，2005 年）
[2] 高木貞治『初等整数論講義第 2 版』（共立出版社，1997 年）