コリオリの力
Coriolis force

一点（原点とは限らない）を中心に回転する物体の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$，速度ベクトルを $\boldsymbol{v}$，角速度ベクトルを $\boldsymbol{\omega}$ とすると，

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$$

つまり，

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} \tag{1}$$

質点に加わる力のベクトルを $\boldsymbol{f}$，物体の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$，原点を中心とするモーメントベクトルを $\boldsymbol{M}$ とすると，

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{f}$$

$\boldsymbol{f}$ と $\boldsymbol{r}$ の順に注意する．外積は交換法則が成り立たない．質点が動こうとする右ねじの方向が $\boldsymbol{M}$ の方向である．

静止座標系（**慣性系**）$O - \boldsymbol{XY}$ に対して，加速度をもって動いている運動座標系（**非慣性系**）$O' - \boldsymbol{xy}$ を考える．非慣性系が慣性系に対して並進運動をしている場合を考える．つまり常に，

$$\boldsymbol{x} \parallel \boldsymbol{X}, \boldsymbol{y} \parallel \boldsymbol{Y}$$

とする．慣性系における点 P の位置ベクトルを $\boldsymbol{R}$，慣性系における非慣性系の原点 O' の位置ベクトルを $\boldsymbol{R_o}$，非慣性系における P の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$ とすると，

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R_o} + \boldsymbol{r}$$

時間 t で微分すると，

$$\dot{\boldsymbol{R}} = \dot{\boldsymbol{R}}_{\boldsymbol{o}} + \dot{\boldsymbol{r}}$$

$\dot{\boldsymbol{R}}$ を**絶対速度**，$\dot{\boldsymbol{R}}_{\boldsymbol{o}}$ を**運搬速度**，$\dot{\boldsymbol{r}}$ を**相対速度**と呼ぶ．さらに微分すると，

$$\ddot{\boldsymbol{R}} = \ddot{\boldsymbol{R}}_{\boldsymbol{o}} + \ddot{\boldsymbol{r}}$$

$\ddot{\boldsymbol{R}}$ を**絶対加速度**，$\ddot{\boldsymbol{R}}_{\boldsymbol{o}}$ を**運搬加速度**，$\ddot{\boldsymbol{r}}$ を**相対加速度**と呼ぶ．運動方程式

$$\boldsymbol{f} = m\ddot{\boldsymbol{R}}$$

より，

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{f} - m\ddot{\boldsymbol{R}}_{\boldsymbol{o}}$$

右辺第 2 項の $-m\ddot{\boldsymbol{R}}_{\boldsymbol{o}}$ は みかけ上の 力で**慣性力**と呼ばれる．直進する電車が加速あるいは減速するときに，乗客が 感じる 力に相当する．

次に慣性系 $O - \boldsymbol{XY}$ と共通の原点をもち $\boldsymbol{XY}$ 平面と垂直な回転軸（$\boldsymbol{Z}$ 軸）に対して角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}$（定ベクトル，つまり 回転速度は一定 とする）をもって回転している非慣性系（**回転座標系**）$O - \boldsymbol{xy}$ を考える．$\boldsymbol{x}$ 軸方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{y}$ 軸方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{j}$ とする．質点 P の回転座標系での座標を (x, y) とする（$\boldsymbol{Z}$ 座標は 0）．P の位置ベクトルを $\boldsymbol{R}$ とすると，

$$\boldsymbol{R} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$$

時間で微分すると，絶対速度 $\dot{\boldsymbol{R}}$ は，後述定理 1 より，

$$\dot{\boldsymbol{R}} = \dot{x}\boldsymbol{i} + \dot{y}\boldsymbol{j} + x\dot{\boldsymbol{i}} + y\dot{\boldsymbol{j}}$$

(1) より，

$$\dot{\boldsymbol{i}} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{i}, \dot{\boldsymbol{j}} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{j}$$

であるから

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{R}} &= \dot{x}\boldsymbol{i} + \dot{y}\boldsymbol{j} + \boldsymbol{\omega} \times (x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}) \\ &= \dot{x}\boldsymbol{i} + \dot{y}\boldsymbol{j} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{R}\end{aligned}$$

回転座標系における P の速度（つまり相対速度）を $\dot{\boldsymbol{r}}$ とすると，

$$\dot{\boldsymbol{R}} = \dot{\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{R} \tag{2}$$

つまりこの場合の運搬速度は $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{R}$ であることがわかる．P が原点から遠いほど運搬速度の大きさは大きくその方向は $\boldsymbol{R}$ と垂直であるので，直感的にも理解しやすい．

ここで準備として次のことを確認しておく．回転座標系での質点 P の加速度を $\ddot{\boldsymbol{r}}$ とすると，実は慣性系で $\dot{\boldsymbol{r}}$ を微分しても $\frac{d}{dt}\dot{\boldsymbol{r}} = \ddot{\boldsymbol{r}}$ とはならない．

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\dot{\boldsymbol{r}} &= \frac{d}{dt}(\dot{x}\boldsymbol{i} + \dot{y}\boldsymbol{j}) \\ &= \ddot{x}\boldsymbol{i} + \ddot{y}\boldsymbol{j} + \dot{x}\dot{\boldsymbol{i}} + \dot{y}\dot{\boldsymbol{j}} \\ &= \ddot{x}\boldsymbol{i} + \ddot{y}\boldsymbol{j} + \dot{x}(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{i}) + \dot{y}(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{j}) \\ &= \ddot{\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{r}}\end{aligned} \tag{3}$$

いまさら気づいても遅いのだが，回転座標系の基本ベクトルを $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ としたのは失敗であった．もともと上に点がついているため，微分したときの点と間違えやすく，大変紛らわしい．(3) を踏まえて (2) をさらに微分すると，後述定理 2 より

$$\begin{aligned}\ddot{\boldsymbol{R}} &= \ddot{\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{r}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{R} + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{R}} \\ &= \ddot{\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{O} + \boldsymbol{\omega} \times (\dot{\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{R}) \\ &= \ddot{\boldsymbol{r}} + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{R})\end{aligned}$$

両辺に質量 m をかけて運動方程式を適用すると，

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{f} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{r}} - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{R})$$

つまりこの場合慣性力はふたつあり，第 2 項の $-2m\boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{r}}$ を**コリオリの力** (転向力) と呼び，回転座標系で加速度がなくても運動していれば（速度があれば）生じる力である．$\boldsymbol{\omega}$ が $\boldsymbol{Z}$ 軸方向のとき，$\boldsymbol{r}$ 方向に対して右方向の力となる．台風の進路が北半球では右に，南半球では左に曲がったりするのはこのためである．第 3 項の $-m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{R})$ はいわゆる**遠心力**で，回転座標系で運動しているいないにかかわらず常に感じる見かけ上の力である．

$$-m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{R}) = m|\boldsymbol{\omega}|^2\boldsymbol{R}$$

であるので，$\boldsymbol{R}$ 方向のベクトル，つまり外向きのベクトルで角速度の大きさの 2 乗，質量，回転半径に比例する．

定理 1 a をスカラー，$\boldsymbol{x}$ を 2 次元ベクトルとすると，

$$\frac{d}{dt}(a\boldsymbol{x}) = \dot{a}\boldsymbol{x} + a\dot{\boldsymbol{x}}$$

［証明］

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

とすると，

$$\frac{d}{dt}(a\boldsymbol{x}) = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} ax_1 \\ ax_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{d}{dt}(ax_1) \\ \dfrac{d}{dt}(ax_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{a}x_1 + a\dot{x}_1 \\ \dot{a}x_2 + a\dot{x}_2 \end{pmatrix} = \dot{a}\boldsymbol{x} + a\dot{\boldsymbol{x}}$$

［証明おわり］

定理 2 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ のとき

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}) = \dot{\boldsymbol{x}} \times \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x} \times \dot{\boldsymbol{y}}$$

［証明］左辺の z 座標は

$$\frac{d}{dt}(x_1 y_2 - x_2 y_1) = \dot{x_1} y_2 - \dot{x_2} y_1 + x_1 \dot{y_2} - x_2 \dot{y_1}$$

となり，右辺の z 座標と等しい． ［証明おわり］