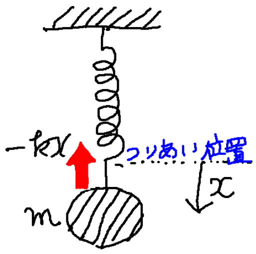
二点吊り法による慣性モーメントの測定

幾何学的に単純な物体は計算により容易に慣性モーメントを求めることができるが，不均一な物体ではそれは容易ではない．慣性モーメントを計る機械もあるが一般的ではない．簡便に慣性モーメントを求める方法として二点吊り法がある．このことについて考察する．

§1　直線運動の単振動



ばね定数 k[N/m]，質量 m[kg] の単振動の運動方程式は

$$m\ddot{x} = \underbrace{-kx}_{\text{復元力 (N)}}$$

で表される．$-kx$ の部分を**復元力**と呼ぶ．

振動数 f[Hz] は次の式で表される．

$$f = \frac{1}{2\pi}\omega = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$\omega = 2\pi f$[rad/s] は**角振動数**と呼ばれる．この振動数，角振動数は重力加速度によらない．よってこれらを測ることによって無重力状態でも物質の質量を測ることができる．つまり

$$m = \frac{k}{\omega^2} = \frac{k}{4\pi^2 f^2}$$

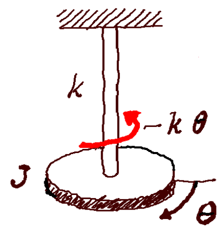
つまり質量は振動数の 2 乗に反比例する．これから行おうとしている慣性モーメントの測定も原理的にはこれと変らない．

§2　回転運動の振動

ねじりばね定数 k[Nm/rad]，慣性モーメント J[kgm^2] の単振動の運動方程式は

$$J\ddot{\theta} = \underbrace{-k\theta}_{\text{復元モーメント (kgm}^2\text{)}}$$

で表される．$-k\theta$ の部分を**復元モーメント**と呼ぶ．



振動数 f[Hz] は次の式で表される．

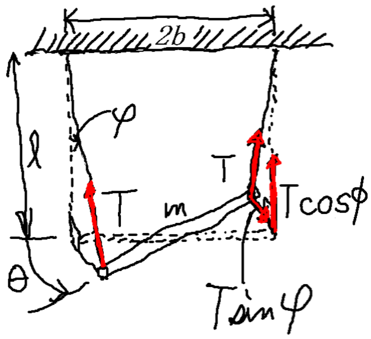
$$f = \frac{1}{2\pi}\omega = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{J}}$$

この振動数を測ることによって物質の慣性モーメントを測ることができる．つまり

$$J = \frac{k}{\omega^2} = \frac{k}{4\pi^2 f^2}$$

つまり直線運動の振動の場合の質量と同じように，慣性モーメントは振動数の 2 乗に反比例する．しかしながら，ねじりばね係数がはっきりしている「ばね」というのはなかなかなくて，この方法は簡便とはいえない．また普通のばねを使用してつるした場合，重さでばねは伸びるわけで，このときねじりばね係数がどうなるのか検証しなくてはならない．もちろんこのねじりばねに相当する測定器を作ることは十分可能である．

§3　棒の二本吊り



太さが一様な棒を平行な二本の糸でつるし，少しねじると回転運動の振動をする（もちろん上下運動もするのだが）．この振動の振動数を測って棒の慣性モーメントを測定してみよう．

図のように各定数を与える．棒が θ ねじられたとき糸にかかる張力を T[N]，糸の鉛直からの角度を ϕ とすると，糸の張力の鉛直方向成分は，

$$T\cos\phi = \frac{1}{2}mg$$

$\frac{1}{2}$ となるのは 2 本で吊っているからである．また張力の水平方向成分は，

$$T\sin\phi = \frac{1}{2}mg\tan\phi$$

復元モーメントは

$$-T\sin\phi \times b \times 2 = -mg\tan\phi \times b$$

ここで底面の二つの三角形は実は直角三角形ではなく，二等辺三角形なので，この式は数学的には厳密ではない．あくまで $\theta \simeq 0$ の場合の近似的な式である．仮に厳密に解いても最後の運動方程式の直前でやはり近似する（しないと初等的に解けない．のちほど，もう少し一般的な例でやや厳密に解いてみる）．またこの場合

$$\sin\theta \simeq \tan\theta \simeq \theta$$

また

$$\sin\phi \simeq \tan\phi \simeq \phi$$

という近似式が成り立つので，結局

$$b\theta \simeq l\phi$$

と近似できる．よって復元モーメントは

$$-\frac{mgb^2}{l}\theta$$

となる．つまり前節におけるねじりばね係数に相当する部分を k とすると，

$$k = \frac{mgb^2}{l} \tag{1}$$

である．この振動の振動数 f は

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{J}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{mgb^2}{lJ}} \tag{2}$$

J について解くと

$$J = \frac{k}{4\pi^2 f^2} = \frac{mgb^2}{4\pi^2 f^2 l}$$

この式により振り子の振動数から慣性モーメントを求めることができるのである．一様な棒は計算により簡単に慣性モーメントが求まるので実験結果と比較できる．しかしながらこれを確かめるには正確な時間とふれる

回数を測定しなければいけないので煩雑である．よってもっと簡単に確かめることを試みよう．長さ $2b$ の一様な太さの棒の慣性モーメントは

$$J = \frac{mb^2}{3} \tag{3}$$

であるからこれを (2) に代入すると，

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3g}{l}} \tag{4}$$

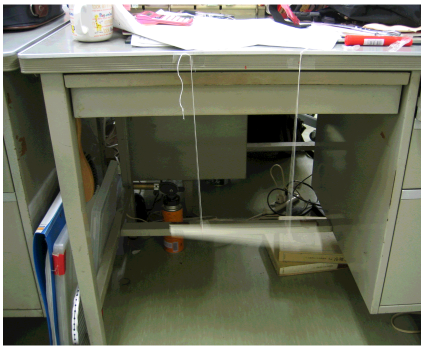


写真 1

そもそも (2) は必ずしも棒の両端を糸で結ばなくても，左右対称，つまり重心がつるした場所の中点にくるような状態で一般に成り立つ．であるからたとえば棒の長さの $\frac{1}{\sqrt{3}}$ の場所で吊るすと，つまり (3) において b を $\sqrt{3}b$ に置き換えると (3) は

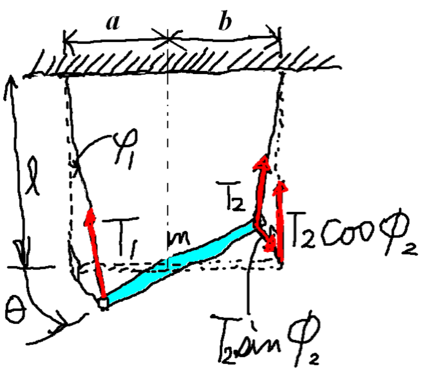
$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}$$

となり，これは単振り子の振動数と全く同じである．であるから，このようなねじり振り子を作り，ねじると同時に単振り子として（棒と垂直の方向の方がわかりやすい）振ってやると，この二つの振動が同期するのが観察できる (写真 1)．ふり幅をうまく調整してやると，棒のどこかが不動点となるはずである．この写真ではわかりにくいが，だいたいここが不動点だろうかという程度の確認はできる．また，単振り子として棒に平行にふってやり，かつねじると同期して，棒の端が円あるいは楕円を描くことになる．この際，注意しなければならないのは，単振り子のみでも円運動が可能なので，かならず棒と垂直方向のみにふらなくてはいけないということである．

§4　重心が中点からずれている場合

前節では左右対称の場合について調べたが，一様な太さの棒の慣性モーメントはそもそも計算で求めることができる．実際に（重心まわりの）慣性モーメントを知りたいとき，太さが一定でないような場合は多い（写真 2)．このような場合重心から両側に等間隔で吊るしても，その場所の物体の太さが違うと斜めになってしまい具合がわるい．そこで糸を平行に吊るすのであるが重心がずれている場合の慣性モーメント測定法はどうなるか調べてみよう．

写真 2



重心は上下動のみで回転の中心とする．前節と同様に考えるが，糸の張力は左右で異なり，糸の振れる角度も違う．よって左右別々に考えなければならない．またねじることによって棒はわずかに傾くが，一般にねじる角度よりさらに小さいので無視する．糸の張力の鉛直方向成分は，それぞれ

$$T_1 \cos\phi_1 = mg \times \frac{b}{a+b}$$

$$T_2 \cos\phi_2 = mg \times \frac{a}{a+b}$$

張力の水平方向成分は，

$$T_1 \sin\phi_1 = mg \tan\phi_1 \times \frac{b}{a+b} \simeq mg\phi_1 \times \frac{b}{a+b}$$
$$T_2 \sin\phi_2 = mg \tan\phi_2 \times \frac{a}{a+b} \simeq mg\phi_2 \times \frac{a}{a+b}$$

この二つの力の大きさはほぼ同じである．そうでないと，棒全体が平行移動してしまう（つまり重心が横揺れを起こしてしまう）．復元モーメントはそれぞれ

$$-mg\phi_1 \times \frac{ab}{a+b}, \quad -mg\phi_2 \times \frac{ab}{a+b}$$

近似式

$$a\theta \simeq l\phi_1, \quad b\theta \simeq l\phi_2$$

を用いて，復元モーメントの和は

$$-mg \times \frac{a\theta}{l} \times \frac{ab}{a+b} - mg \times \frac{b\theta}{l} \times \frac{ab}{a+b} = -\frac{mgab}{l}\theta$$

である．前節の (1) の b^2 の部分を ab に置き換えたものであり，(1) を一般化したものであることがわかる．振動数 f はねじりばね係数に相当する k は

写真 3

$$k = \frac{mgab}{l}$$

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{J}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{mgab}{lJ}}$$

J について解くと

$$J = \frac{k}{4\pi^2 f^2} = \frac{mgab}{4\pi^2 f^2 l} \tag{5}$$

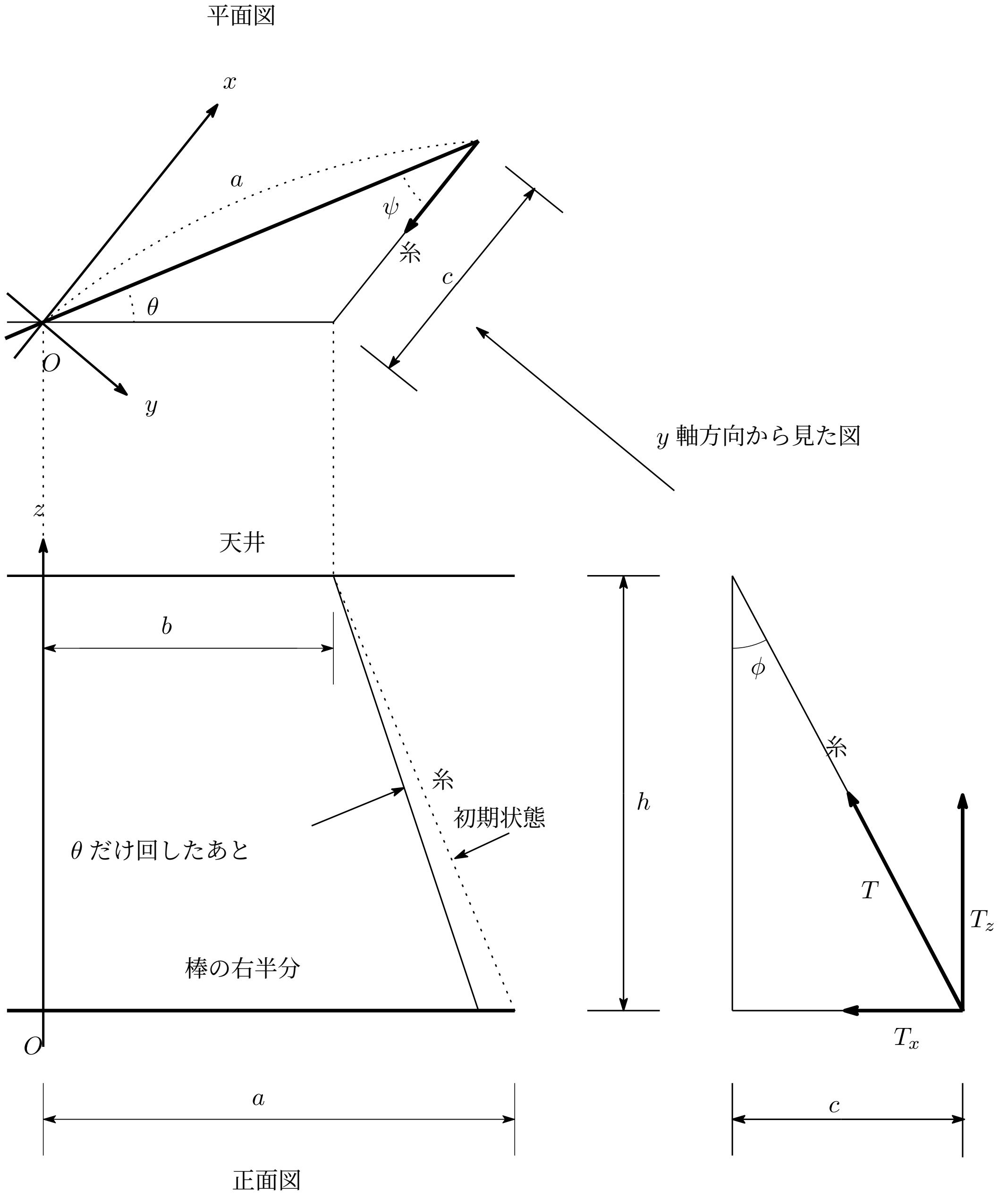
前節で行ったように単振り子と同期させることによってこの式が正しいことを実験できる．それには

$$ab = \frac{\text{棒の長さの半分}^2}{3}$$

とすることによって単振り子とねじり振り子の振動数が等しくなることを利用する (写真 3).

§5　等脚台形で吊るした場合

重心が糸の結び目の中点にある場合は，必ずしも平行な糸で支持する必要はなく，等脚台形で吊るしても慣性モーメントを求めることができる．重心が中点にない場合もできないことはないが，初期状態から棒は傾いてしまうので誤差が増えることが予想できる．またねじった場合の垂直方向の回転運動も無視できなくなると思われるのでここでは左右対称の等脚台形の場合についてのみ考えることにする．この問題についてはさすがに前節までのようないい加減な図では対処できないのできちんと描くことにする．注意しなければならないのは x 軸は棒の向きでもなく，棒の初期状態の向きでもないことである．上から見たときに糸の xy 平面への正射影である．



図のように各定数を与える．棒が θ ねじられたとき糸にかかる張力を T[N] とする．ϕ は糸の初期状態からの角度ではなく，糸の上端から垂直におろした直線との角度である．であるから，この ϕ は θ, ψ と違って 0 に近いというわけではない．糸の張力の鉛直方向成分 T_z は,

$$T_z = T\cos\phi = \frac{1}{2}mg$$

張力の水平方向成分，つまり x 軸方向成分 T_x は,

$$T_x = T\sin\phi = \frac{1}{2}mg\tan\phi = \frac{1}{2}mg \times \frac{c}{h}$$

糸が平行の場合はこの水平方向成分が棒に復元モーメントを与えると考えてよかったが，今度はこの T_x は棒と垂直とはみなせないので，さらに考えなくてはいけない．T_x の棒と垂直な方向の成分は，

$$T\sin\psi = \frac{1}{2}mg \times \frac{c}{h}\sin\psi \tag{6}$$

正弦定理より，

$$\sin\psi = \frac{a\sin\theta}{c}$$

であるから，(6) は

$$\frac{1}{2}mg \times \frac{a\sin\theta}{h}$$

ここまで厳密に解いてきたが，ここで $\sin\theta \simeq \theta$ を用いて，復元モーメントは

$$-\frac{abmg\sin\theta}{h} \simeq -\frac{abmg\theta}{h}$$

となる．つまり前節におけるねじりばね係数に相当する部分を k とすると，

写真 4

$$k = \frac{abmg}{h}$$

となり，これまでの式と形は変わらない．振動の振動数 f は

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{J}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{mgab}{hJ}} \tag{7}$$

J について解くと

$$J = \frac{k}{4\pi^2 f^2} = \frac{mgab}{4\pi^2 f^2 h}$$

一様な太さの棒で単振り子と同期させるには

$$ab = \frac{\text{棒の長さの半分}^2}{3}$$

とすればいいので簡単である．写真 4 のように，棒の両端に糸をセロテープでくっつけ，糸の上端の幅は棒の長さの $\frac{1}{3}$ にしてやればいいわけである．またはその反対でも同じである．

§6　実際の測定法

まずなんと言っても質量をはからなくてはならない．今はデジタルの量りがあるのでとても便利である (写真 5)．このジャグリングクラブは 272g であった．次に重心を求めよう．指でやっても大体の重心はわかるが，写真 6 のように糸で吊るせば正確である．どのみち糸を使うのだから，おなじ糸で測っておくとよいであろう．重心の位置が求まったら，両端までの長さを測る．写真のクラブの場合短い方は 204mm で長い方は 304mm であった．つまり全長は 508mm(20in.) である．この幅で糸をつるせばよい (写真 7)．糸の長さは 550mm であった．さてねじり振り子の振動数あるいは周期を正確に測るにはデジタルカメラの動画を使う．最新の機種では 1 秒間で撮れるコマ数はかなり多い．ソフトは WindowsMOVIE MAKER を用

写真 5

いた．私の使ったカメラは 2004 年のモデル (IXY DEGITAL 500) なので 1 秒間に 15 フレームしか撮れない．それでも 20 回程度の振動の間に何秒かかったかを計れば十分な精度が得られる．

振動の中心を通るコマを特定すれば計りやすいだろう．今回の実験では 34 周期の間に 27.07 秒かかった．つまり振動数は

$$f = 1.256(\mathrm{Hz})$$

である．これらの定数を代入すると，(5) より，

$$\begin{aligned} J &= \frac{mgab}{4\pi^2 f^2 l} \\ &= \frac{0.272 \times 9.8 \times 0.204 \times 0.304}{4 \times 3.14^2 \times 1.256^2 \times 0.55} \\ &= 0.00483[\mathrm{kgm}^2] \end{aligned}$$


写真 6


写真 7

参考文献

[1] 滋賀県立大学人間融合設計工学研究室「機械力学 I」
<http://www.mech.usp.ac.jp/~hnw/model/kiriki1.html>

[2]「二本吊りによる慣性モーメントの測定」
<http://m9841.info/report/school/oubutsu/nihon.html>