単振動を表す微分方程式

単振動を表す微分方程式を虚数を用いないで解いてみる.

問題 1

$$\ddot{x} = -\omega^2 x, \quad , \ddot{x}(0) = 0, \quad x(0) = x_0 \tag{1}$$

を解け.

［解］

(1) の両辺に $\dot{x}$ をかけて,

$$\dot{x}\ddot{x} = -\omega^2 x\dot{x}$$

両辺を積分すると

$$\int \dot{x}\ddot{x}dt = -\omega^2 \int x\dot{x}dt$$

$$\int \dot{x}d\dot{x} = -\omega^2 \int xdx$$

$$\dot{x}^2 = -\omega^2 x^2 + C \tag{2}$$

$\ddot{x}(0) = 0, \quad x(0) = x_0$ より

$$C = \omega^2 {x_0}^2$$

よって (2) は

$$\dot{x}^2 = \omega^2({x_0}^2 - x^2)$$

$$\dot{x} = \pm\omega\sqrt{{x_0}^2 - x^2}$$

$$\frac{\dot{x}}{\sqrt{{x_0}^2 - x^2}} = \pm\omega$$

両辺を積分して

$$\int \frac{dx}{\sqrt{{x_0}^2 - x^2}} = \pm\omega t \tag{3}$$

$$x = x_0 \cos\theta \tag{4}$$

と置換して

$$\frac{dx}{d\theta} = -x_0 \sin\theta$$

よって (3) は

$$-\int d\theta = \pm\omega t$$

解いて,

$$\theta = \pm\omega t + C$$

(4) に代入して

$$x = x_0 \cos(\pm\omega t + C)$$

$x(0) = x_0$ より $C = 0$ であるから

$$x = x_0 \cos(\pm\omega t)$$
$$\therefore x = x_0 \cos\omega t \quad \cdots (Ans.)$$