二体問題と潮汐

月の引力により海水が引っ張られることは容易に理解できるが，月の反対側も海水面が上がることは直感的に理解しにくい．このことを考察してみよう．

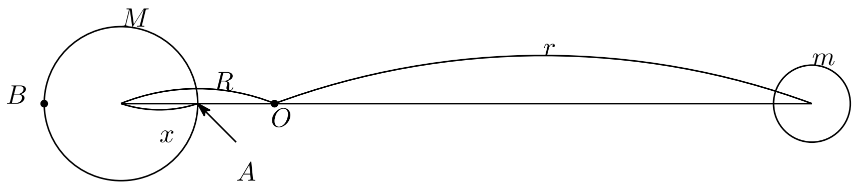

図 1

図 1 は地球と月のイメージ図である．縮尺も各長さもでたらめである．太陽はとりあえず無視している．地球上の点 A と，B における重力と遠心力の合力を求めてみよう．

と，その前に地球と月の重心 O はどこか調べてみよう．

$$MR = mr$$

および

$$M = 5.972 \times 10^{24}[\mathrm{kg}], m = 7.36 \times 10^{22}[\mathrm{kg}], R + r = 384400[\mathrm{km}]$$

より，

$$R = 384400 \times \frac{m}{M+m} = \frac{384400 \times 7.36 \times 10^{22}}{5.972 \times 10^{24} + 7.36 \times 10^{22}} = \frac{384400 \times 7.36}{604.56} = 4679.74[\mathrm{km}]$$

地球の赤道面半径は 6378.137[km] なので重心 O は地球の内部にある．つまり図 1 のようにはならずに，図 2 の方が正しい．

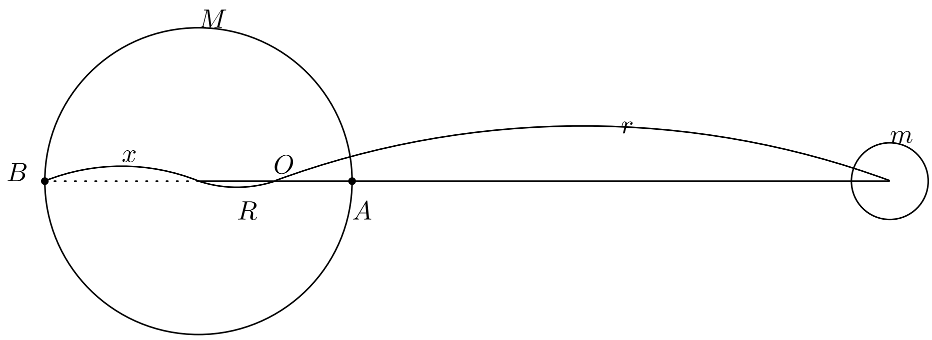

図 2

まず，地球と月が O の回りをどのくらいの速さで回転しているか求めてみよう．角速度を ω とすると，遠心力は万有引力とつりあっているので，

$$m\omega^2 r = G\frac{Mm}{(R+r)^2}$$

$$\omega^2 = \frac{GM}{r(R+r)^2}$$

地球の自転，公転による力を無視すると，点 A にある質量 n の物体にかかる力は，地球の中心に向かう方を正とすると，

$$\begin{aligned} &\frac{GMn}{x^2} - \frac{Gmn}{(R+r-x)^2} - n\omega^2(x-R) \\ =&\frac{GMn}{x^2} - \frac{Gmn}{(R+r-x)^2} - \frac{GMn(x-R)}{r(R+r)^2} \end{aligned} \tag{1}$$

点 B にある質量 n の物体にかかる力は，地球の中心に向かう方を正とすると，

$$\begin{aligned} &\frac{GMn}{x^2} + \frac{Gmn}{(R+r+x)^2} - n\omega^2(x+R) \\ =&\frac{GMn}{x^2} + \frac{Gmn}{(R+r+x)^2} - \frac{GMn(x+R)}{r(R+r)^2} \end{aligned}$$

ここで

$$G = 6.67259 \times 10^{-11}[\mathrm{m^3s^{-2}kg^{-1}}], M = 5.972 \times 10^{24}[\mathrm{kg}],$$

$$m = 7.36 \times 10^{22}[\mathrm{kg}], R + r = 384400000[m], R = 4679740[\mathrm{m}], x = 6378137[m]$$

を代入すると，点 A における重力加速度以外の力（つまり月の引力と遠心力に相当する．(1) の第 2 項と第 3 項の和の符号を逆にしたもの）は

$$4.642884\,10^{-5}$$

点 B におけるそれは,

$$4.637391\,10^{-5}$$

となりほぼ同じである．これは地球による重力加速度と比べたらかなり小さく，地球の自転による遠心力と比べても小さいが，同じだけの力で外向きに引っ張られていることがわかる．これが月による潮汐に関係している．もう少し深く考察することも可能であるが，興味が尽きたのでこの辺にしておく．各定数は [1] を用いた．

参考文献

[1] 「ウィキペディア」<http://ja.wikipedia.org/wiki/>