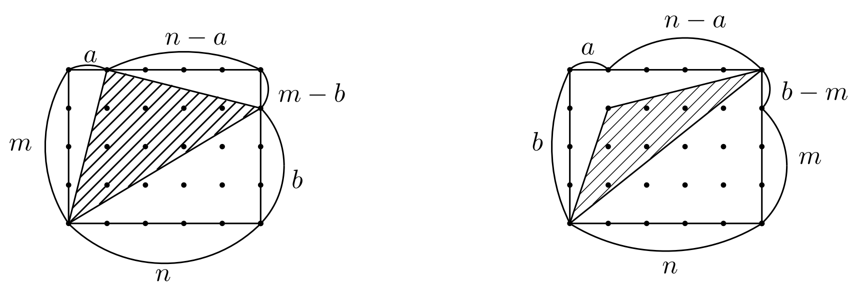
ピックの定理

ピックの定理 (Pick's theorem) とは，1899 年にオーストリアの数学者ゲオルグ・ピック (Georg Alexander Pick) によって初めて示された，格子点を頂点にもつ多角形の面積を求める公式である．シンプルで美しい公式であるが何故か日本の教育で教えられることはない．

$$\boxed{\textbf{ピックの定理}\quad S = I + \frac{E}{2} - 1}$$

ただし，S は格子点を頂点にもつ多角形の面積．I は多角形の中の格子点の個数．E は辺上（頂点を含む）の格子点の個数．

[証明]　格子点を頂点にもつ多角形は分割してゆくと，格子点を頂点にもち，頂点以外の辺上に格子点をもたない 3 角形になる．その 3 角形は図 1 の (A),(B) ような場合に分かれる．



(A)　(B)

図 1

まず (A) について調べてみよう．3 角形の面積 S は

$$\begin{aligned} S =& mn - \frac{1}{2}\{am + bn + (n-a)(m-b)\} \\ =& \frac{1}{2}(mn - ab) \end{aligned}$$

内部の格子点の数 I を数えると

$$\begin{aligned} I =& (m+1)(n+1) - \frac{1}{2}\{(a+1)(m+1) + (b+1)(n+1) + (n-a+1)(m-b+1)\} \\ =& \frac{1}{2}(mn-ab) - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

これは，ピックの定理を満たしている．続いて (B) について調べると

$$\begin{aligned} S =& \frac{1}{2}nb - a(b-m) - \frac{1}{2}\{am + (n-a)(b-m)\} \\ =& \frac{1}{2}(mn - ab) \end{aligned}$$

内部の格子点の数 I を数えると

$$\begin{aligned}I =&\frac{1}{2}(b+1)(n+1)-\frac{1}{2}\{(a+1)(m+1)+(n-a+1)(b-m+1)\}-a(b-m)\\=&\frac{1}{2}(mn-ab)-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

やはりピックの定理を満たしている．

次に，ピックの定理を満たしている多角形 2 つを接合して新たな多角形を作り，それがピックの定理を満たすかどうか調べる．接合前の二つの多角形と接合後の多角形の面積，内部の格子点数，辺上の格子点数をそれぞれ $S_1, S_2, S, I_1, I_2, I, E_1, E_2, E$ とする．また共通辺上の格子点数を K とすると，

$$\begin{aligned}S &= S_1 + S_2\\S_1 &= I_1 + \frac{E_1}{2} - 1\\S_2 &= I_2 + \frac{E_2}{2} - 1\\\therefore S &= I_1 + I_2 + \frac{E_1+E_2}{2} - 2 \qquad (1)\\I &= I_1 + I_2 + K - 2\\E &= E_1 + E_2 - 2k + 2\\I + \frac{E}{2} - 1 &= I_1 + I_2 + K - 2 + \frac{E_1+E_2-2K+2}{2} - 1\\&= I_1 + I_2 + \frac{E_1+E_2}{2} - 2 \qquad (2)\end{aligned}$$

(1),(2) より新たな多角形においてもピックの定理が成り立っている．よって数学的帰納法によって証明された．

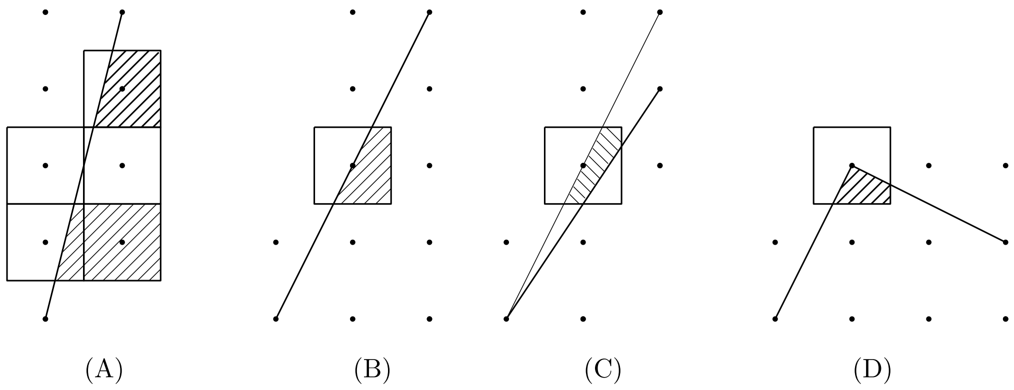


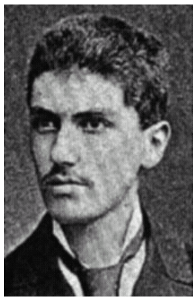
図 2

ピックの定理の右辺における I は格子点 1 つの閉める面積が平均して 1 であることを示している（図 2 A). 1 より少ない面積を占める格子点もあるが，他の格子点がそれを補完している．また定理の右辺の $\frac{E}{2}$ は格子点一つが $\frac{1}{2}$ の面積を占めることを表している（図 2 B)．これは感覚的に理解しやすいが，実際は (C) のような場合もあるので検証するには場合わけをきちんとやらなければならない．それでは右辺の最後の -1 は何であろうか．それは頂点の部分の問題である．頂点の占める部分の面積は一般に $\frac{1}{2}$ より小さい．その余分の

面積が 1 なのである．あらゆる多角形の外角の和が等しく 2π であるので何角形であっても -1 でよいのである．

この考え方を発展すると 3 次元の多面体についても一般化できそうであるが，同時に困難を伴うことが予想できる．多面体の辺や頂点は平面のそれらと比べるとかなりいろいろな要素があるからである．

ゲオルグ・アレクサンダー・ピック (Georg Alexander Pick)



オーストリアの数学者．1859 年 8 月 10 日ウィーンのユダヤ人の家庭に生まれ，1942 年 7 月 26 日テレジーン強制収容所で亡くなる．父は私立研究所の所長であった．ゲオルグは 11 歳でギムナジウムの 4 年生に入るまでの間，家庭で父親により教育を受ける．1875 年 16 歳でウィーン大学に入学．数学と物理学を学び，1879 年卒業と同時にその両方を教えることを許される．17 歳より論文を出している．1880 年博士号を取得 (20 歳)．その後プラハのカール・フェルニナンド大学のエルンスト・マッハ（音速の単位で有名）の助手になる．1884 年から 1885 年にかけてライプニッヒ大学のクライン（クラインの壺で有名）のもとで研究をしたが，それ以外の時期はプラハに残る．彼の研究は非常に多岐にわたり，その論文は 67 本である．半分以上は複素関数，微分方程式，微分幾何学に関するものである．「ピックの定理」は 1899 年に発表した 8 ページの論文に書かれている．この論文においてピックは格子線を'main reticular lines'，格子点を'reticular points' と呼んでいる．この定理は以後注目されることは無かったが，1969 年 Steinhaus が *Mathematical Snapshots* で紹介してから注目され，その簡潔美に賞賛が与えられるようになった．

ピックとアインシュタインのつながりは深い．ピックが German University of Prague にあったとき，アインシュタインを呼び寄せることに尽力する．アインシュタインは 1905 年に特殊相対性理論を発表していた．アインシュタインが German University of Prague に在職した 1911 年から 1913 年の 3 年間二人は科学的興味を共有するだけでなく親しい友人であった．二人はともにバイオリンを愛し，他の研究者とともにカルテットを組んで演奏を楽しんだ．そしてピックはアインシュタインに対して相対性理論を一般化するにあたって重要なアドバイスを与えた．

1927 年に German University of Prague を退職し，名誉教授となる．そして故郷のウィーンに帰る．しかしナチスドイツの台頭によりピックは穏やかな余生を送ることは出来ない．1938 年 3 月 12 日のオーストリア併合後再びプラハに戻ることになる．1938 年 9 月にはドイツはドイツ民族が過半数を占めるボヘミアとモラビアの割譲を要求する．チェコスロバキア指導部は要求を受け入れることなく辞任する．後任の指導部は結局割譲を許すことになる．1939 年 3 月 14 日ドイツ軍はプラハに侵攻し占領する．

ピックはチェコ科学芸術アカデミーの会員となっていたが，ドイツのプラハ侵攻後除名される．

1941 年 11 月 24 日ナチスはテレジーンに老人，特権階級，著名人のユダヤ人のための強制収容所を作る．この強制収容所は国際赤十字の調査をごまかすため他の収容所より外観が丁寧に整えられていた．収容者によって構成されたオーケストラ等で国際赤十字を歓迎する事で彼らを騙まし，虐殺の事実を隠蔽した．ここに送られた 144,000 人のユダヤ人のうち約 4 分の 1 はここで亡くなる．また約 60% はアウシュヴィッツやほかの収容所に送られる．ピックは 1942 年 7 月 13 日テレジーン収容所に送られ 2 週間後に亡くなる．享年 82 歳.