# 鳩ノ巣原理とペル方程式の解の存在

鳩ノ巣原理 (pigeonhole principle) は引き出し論法 (Dirichlet drawer principle)，ディリクレの原則ともいわれる．

**定理 1** $n$ 個の部屋があり，そこに $(n+1)$ 人を入れるとき，2 人以上入る部屋がある．

[証明] もし，どの部屋も 1 人以下であるとすると，全体の人数は $n$ 人以下となり，$(n+1)$ 人いることと矛盾する． [証明おわり]

**定理 2** 無限個の元を決まった方式によって有限個の集合に分ければ，無限個の元を含む集合が少なくとも 1 つ存在する．

[証明] 有限個の集合全てが有限個の元をもつとすると，その和集合も有限個の元をもつこととなり，無限個の元をもつことと矛盾する． [証明おわり]

**定理 3** $\omega$ を無理数とすると，

$$|x - \omega y| < \frac{1}{x}$$

となる整数の組 $(x, y)$ が無数に存在する．

[証明] 任意の自然数 $n$ に対して，区間 $[0, 1)$ を

$$\left[0, \frac{1}{n}\right), \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right), \left[\frac{2}{n}, \frac{3}{n}\right), \cdots, \left[\frac{n-1}{n}, 1\right)$$

と $n$ 等分する．$y = 0, 1, 2, \cdots, n$ の $n+1$ 個の値を与え，$x = [\omega y]$ とすると，

$$0 \leq \omega y - x < 1$$

定理 1 よりどれか 2 つの値が一つの区間に属しそれらを，

$$\omega y_1 - x_1, \omega y_2 - x_2 \quad (y_1 > y_2)$$

とおく．

$$|(\omega y_1 - x_1) - (\omega y_2 - x_2)| < \frac{1}{n}$$

あらたに

$$x = x_1 - x_2, y = y_1 - y_2 \tag{1}$$

とすると，

$$|\omega y - x| < \frac{1}{n}$$

$y = 0, 1, 2, \cdots, n$ つまり $0 < y_1 - y_2 \leq n$ であるから，(1) における $x$ について

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{y}$$

つまり,

$$|\omega y - x| < \frac{1}{y}$$

となる整数 $x, y$ が存在する．この任意の $n$ 等分について $n$ を増やしてゆけば無数にこのような $x, y$ を作ることができるのだが, 厳密に論証すると，もし，このような $x, y$ が有限組しかないとすれば, その最小の $|\omega y - x|$ であるものについてさらに小さな,

$$\frac{1}{n} < |\omega y - x|$$

を作ることができる．その $n$ について同様のことをやれば，さらに小さな

$$|\omega y - x| < \frac{1}{n}$$

を作ることができ，最小と仮定したものより小さいものができるので有限組ではない． [証明おわり]

**補題 1** $D$ が平方数であるとき

$$x^2 - Dy^2 = 1$$

を満たす自然数解はない．

[証明]$D = A^2 (A > 0)$ とすると,

$$(x + Ay)(x - Ay) = 1$$

$x + AY > 0$ より,

$$\begin{cases} x + Ay = 1 \\ x - Ay = 1 \end{cases}$$

よって,

$$(x, y) = (1, 0)$$

以外に解はない． [証明おわり]

**定理 4** $D$ を平方数でない自然数とするとき

$$x^2 - Dy^2 = 1 \tag{2}$$

を満たす自然数解が存在する．

[証明] 定理 2 より

$$|x - \sqrt{D}y| < \frac{1}{y} \tag{3}$$

つまり

$$-\frac{1}{y} < x - \sqrt{D}y < \frac{1}{y}$$

となる整数の組 $(x, y)$ は無数に存在する．

$$0 < 2y\sqrt{D} - \frac{1}{y} < x + \sqrt{D}y < 2y\sqrt{D} + \frac{1}{y} \tag{4}$$

(3),(4) より

$$|x^2 - Dy^2| < 2\sqrt{D} + \frac{1}{y^2} \leq 2\sqrt{D} + 1$$

よって，このとき $x^2-Dy^2$ は $-[2\sqrt{D}+1],\cdots 0,1,2,\cdots,[2\sqrt{D}+1]$ のどれかの値をとる．その中で少なくとも一つについて無数の $x,y$ の組を持つ（定理 2）．つまりその一つの値を $k$ とすると，

$$x^2-Dy^2=k$$

となる整数解 $(x,y)$ は無数にある．$k=1$ の場合は証明が終わる．$k\neq 1$ のとき $|k|$ を法として，$x_1\equiv x_2, y_1\equiv y_2$ となるものが必ずある．つまり

$$x_1=x_2+ik, y_1=y_2+jk$$

$$\begin{aligned}
k^2 &= ({x_1}^2-D{y_1}^2)({x_2}^2-D{y_2}^2)\\
&= {x_1}^2{x_2}^2-D({x_1}^2{y_2}^2+{x_2}^2{y_1}^2)+D^2{y_1}^2{y_2}^2\\
&= (x_1x_2-Dy_1y_2)^2-D({x_1}^2{y_2}^2+{x_2}^2{y_1}^2-2x_1x_2y_1y_2)\\
&= (x_1x_2-Dy_1y_2)^2-D(x_1y_2-x_1y_2)^2\\
&= k^2\{1+(ix_2-Djy_2)\}^2-Dk^2(iy_2-jx_2)^2
\end{aligned}$$

両辺を $k^2$ で割って，

$$1=\{1+(ix_2-Djy_2)\}^2-D(iy_2-jx_2)^2$$

つまり，

$$x=1+(ix_2-Djy_2), y=iy_2-jx_2$$

が (2) の解である．　[証明おわり]

この証明は文字が多いのでわかりにくい．実際に数をあてはめてみよう．$x^2-2y^2=1$ の自然数解を調べてみるとき，

$$|x^2-2y^2|<2\sqrt{2}+1$$

となる自然数解が無数にあるのだが，このうちで

$$x^2-2y^2=2$$

である二組 $(2,1),(10,7)$ を見つけた．これは 2 を法として $x$ どうし，$y$ どうしが合同である．よって

$$\begin{aligned}
x =& 1+(4\times 2-2\times 3\times 1)=3\\
y =& 4\times 1-3\times 2=2
\end{aligned}$$

確かにこれは $x^2-2y^2=1$ を満たす．$x^2-5y^2=1$ では

$$|x^2-2y^2|<2\sqrt{5}+1<6$$

となる自然数解が無数にあるのだが，このうちで

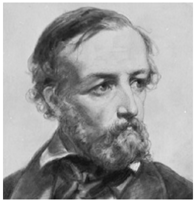
$$x^2-2y^2=4$$

である二組 $(3,1),(47,21)$ を見つけた．これは 4 を法として $x$ どうし，$y$ どうしが合同である．証明の最後よりやや手前の式に代入してもかまわない．

$$\begin{aligned}
&3\times 47-5\times 1\times 21=36\\
&3\times 21-1\times 47=16\\
&\therefore x=9, y=4
\end{aligned}$$

確かにこれは $x^2-5y^2=1$ を満たす．

**ディリクレ** (Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet, 1805-1859)*1



ドイツの数学者．ディリクレは父が郵便局長をしていたデュレン（当時のフランス帝国，現在のドイツ）で生まれる．最初はドイツで教育を受け，後にフランスでフーリエ，ラプラス，ルジャンドルらに学んだ．ケルン大学を 16 才で卒業．ベルリン大学教授の後，ガウスの後任としてゲッティンゲン大学教授となる．ディリクレの最初の論文はフェルマーの最終定理に関するもので，査読者の一人であったルジャンドルが証明を完成した．この論文には $n=5$ の場合の部分的な証明を含んでいた．ディリクレもほぼ同時期に自身の証明を完成させており，また後に $n=14$ の場合の完全な証明を行なった．妻レベッカの兄は作曲家のメンデルスゾーンである．ヤコビとは親しい交流があった．アイゼンシュタイン，リーマン，クロネッカー，リプシッツ を教えた．54 歳でゲッチンゲンに死す．死後，友人で同僚であった数学者デデキントがディリクレの『整数論講義』を出版した．名言として「偉大な数学者とは盲目的な計算をすばらしいアイデアに置き換える人のことである.」がある．

## 参考文献


[1] 「私的数学塾」http://www004.upp.so-net.ne.jp/s_honma/

[2] 高木貞治『初等整数論講義第 2 版』(共立出版社，1997 年)

[3] 「ウィキペディア」<http://ja.wikipedia.org/wiki/>

[4] 蟹江幸博「人名索引」<http://www.com.mie-u.ac.jp/~kanie/tosm/humanind/jinmei.htm>


*1 参考文献 [3],[4]