

凸多角形の内部に含まれる凸多角形の周の長さ

次の問題は一見自明な初等幾何の問題であるが、方針を正しく定めないと結論を導くことが困難であるという例である。

問題 凸多角形 S の内部に含まれる凸多角形 T の周の長さよりも、 S の周の長さの方が長いことを証明せよ。

解 内側の凸多角形 T の頂点の数を n 個とする。内側の凸多角形 T の各頂点から、その頂点に集まる 2 本の辺のそれぞれに垂直な半直線 2 本を外側に向かって引く。

半直線は全部で $2n$ 本あり、外側の凸多角形 S の周はこれらの半直線で分断され

- (1) T の同一頂点から出た 2 本の半直線で区切られた n 個の部分
- (2) T の隣り合う頂点から出た 2 本の半直線で区切られた n 個の部分

に分けられることになる。

(1) の各部分の長さは正である。(図の WX や YZ に相当する線分の長さの和)

(2) の各部分の長さ(図の XY など)は、対応する「 T の隣り合う頂点」にはさまれた T の辺の長さ(図の AB など)よりも長い、または等しい。よって、

$$T \text{ の周} \quad (2) \text{ の長さの合計} < (1) \text{ と } (2) \text{ の長さの合計} = S \text{ の周}$$

という関係が成り立つ。

