期待値について

問題 1 X と Y が独立で供に標準正規分布 $N(0,1)$ に従うとき、$E(|X-Y|^n)$ を求めよ.

[解] 二つの正規分布の和または差の分布はやはり正規分布となり，平均が元の分布の平均の和（差）になり，分散は元の分散の和になる．つまり，この問題は，確率変数 x が正規分布 $N(0,2)$ に従うとき，$E(|x|^n)$ を求めよ，という問題に等しい.

$N(\mu,\sigma^2)$ の確率密度関数は,

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

であるから,

この問題を解くための確率密度関数は,

$$f(x)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{x^2}{4}}$$

とあらわされる．2 は分布の分散である．求める期待値は

$$\begin{aligned}E_n&=\int_{-\infty}^{\infty}|x|^n f(x)dx\\&=2\int_0^{\infty}x^n f(x)dx\\&=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}x^n e^{-\frac{x^2}{4}}dx\end{aligned}\tag{1}$$

$$\left(e^{-\frac{x^2}{4}}\right)'=-\frac{1}{2}xe^{-\frac{x^2}{4}}$$

より,

$$\left(-2e^{-\frac{x^2}{4}}\right)'=xe^{-\frac{x^2}{4}}$$

つまり，(1) は,

$$\begin{aligned}u&=x^{n-1}\\v'&=xe^{-\frac{x^2}{4}}\end{aligned}$$

と置くことにより,

$$\begin{aligned}u'&=(n-1)x^{n-2}\\v&=-2e^{-\frac{x^2}{4}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E_n&=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left\{\left[-2x^{n-1}e^{-\frac{x^2}{4}}\right]_0^{\infty}-\int_0^{\infty}-2(n-1)x^{n-2}e^{-\frac{x^2}{4}}dx\right\}\\&=\frac{2(n-1)}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}x^{n-2}e^{-\frac{x^2}{4}}dx\\&=2(n-1)E_{n-2}\\&=2(n-1)2(n-3)E_{n-4}\\&\cdots\end{aligned}$$

n が 2 以上の偶数のとき,

$$\begin{aligned}
E_n &= 2(n-1)2(n-3)2(n-5)\cdots 2\cdot 1E_0 \\
&= \frac{2^{\frac{n}{2}}n!}{2^{\frac{n}{2}}\left(\frac{n}{2}\right)!}E_0 \\
&= \frac{n!}{\left(\frac{n}{2}\right)!} \\
&= {}_nC_{\frac{n}{2}}
\end{aligned}$$

n が奇数のとき,

$$\begin{aligned}
E_n &= 2(n-1)2(n-3)2(n-5)\cdots 2\cdot 2E_1 \\
&= 2^{n-1}\left(\frac{n-1}{2}\right)!E_1 \\
&= 2^{n}\left(\frac{n-1}{2}\right)!\frac{1}{\sqrt{\pi}} \\
E_0 &= 1 \\
E_1 &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \\
E_2 &= 2 \\
E_3 &= \frac{2^3 1!}{\sqrt{\pi}} = \frac{8}{\sqrt{\pi}} \\
E_4 &= \frac{4!}{2!} = 12
\end{aligned}$$

ガンマ関数を用いると,

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt \qquad (Re\ z > 0)$$

であるから,

$$t = \frac{x^2}{4}$$

とすると,

$$\frac{dt}{dx} = \frac{x}{2}$$

であるから,

$$\begin{aligned}
\Gamma(z) &= \int_0^\infty \left(\frac{x^2}{4}\right)^{z-1}\frac{x}{2}e^{-\frac{x^2}{4}}dx \\
&= \left(\frac{1}{4}\right)^{z-1}\frac{1}{2}\int_0^\infty x^{2z-1}e^{-\frac{x^2}{4}}dx \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{2z-1}\int_0^\infty x^{2z-1}e^{-\frac{x^2}{4}}dx
\end{aligned}$$

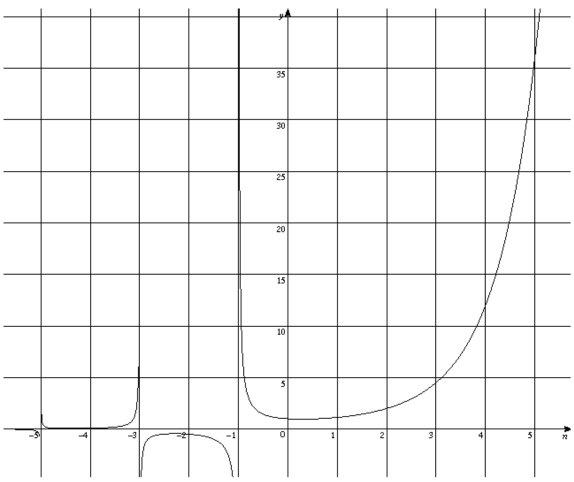
$$\therefore \int_0^\infty x^{2z-1}e^{-\frac{x^2}{4}}dx = 2^{2z-1}\Gamma(z)$$

$2z-1=n$ とおくと，$z=\dfrac{n+1}{2}$ であるから，(1) は,

$$
\begin{aligned}
E_n &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty x^n e^{-\frac{x^2}{4}}\,dx \\
&= \frac{2^n\Gamma\left(\dfrac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} \\
E_0 &= \frac{\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} = 1 \\
E_1 &= \frac{2\Gamma\left(1\right)}{\sqrt{\pi}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \\
E_2 &= \frac{4\Gamma\left(\dfrac{3}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} = 2
\end{aligned}
$$

これは当然ながら問題の $X-Y$ の分散に等しい.

$$
\begin{aligned}
E_3 &= \frac{8\Gamma\left(2\right)}{\sqrt{\pi}} = \frac{8}{\sqrt{\pi}} \\
E_4 &= \frac{16\Gamma\left(\dfrac{5}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} = 12 \\
E_5 &= \frac{32\Gamma\left(3\right)}{\sqrt{\pi}} = \frac{64}{\sqrt{\pi}} \approx 36.1
\end{aligned}
$$



Windows に付属の関数電卓や，Google の検索窓は複素数範囲でガンマ関数に対応している．電卓では Γ(z) を計算するときは (z-1)!を求めればよい.

参考文献

[1] 「ウィキペディア」<http://ja.wikipedia.org/wiki/>