

正規分布の和

二つの正規分布の和または差の分布はやはり正規分布となり，その平均は元の分布の平均の 和（差） になり，分散は元の分散の 和 になる．（差にはならない）

このことを証明するには，煩雑な計算をしなければならない．よって重要となる部分のみをとりだして考えてみる．もとになる二つの正規分布を，

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}r} e^{-\frac{x^2}{2r^2}}, g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}s} e^{-\frac{(x-u)^2}{2s^2}}$$

とする． r, s は二つの正規分布の 標準偏差 である．一つの正規分布は平均が 0 で，他方の平均は u である．この二つの正規分布の和を考えると，

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(x)dx$$

であるが，

$$e^{-\frac{(x-t)^2}{2r^2} - \frac{(x-u)^2}{2s^2}}$$

が被積分関数の主要部分である． t はあらたに和の分布を考える際の変数となる．さらに変形すると．

$$\begin{aligned} & e^{-\frac{(x-t)^2}{2r^2} - \frac{(x-u)^2}{2s^2}} \\ &= e^{-\frac{s^2x^2 - 2s^2tx + s^2t^2 + r^2x^2 - 2r^2ux + r^2u^2}{2r^2s^2}} \end{aligned} \quad (1)$$

指数部分のみを取り出すと，

$$\begin{aligned} & -\frac{s^2x^2 - 2s^2tx + s^2t^2 + r^2x^2 - 2r^2ux + r^2u^2}{2r^2s^2} \\ &= -\frac{(r^2 + s^2) \left(x - \frac{s^2t + r^2u}{r^2 + s^2} \right)^2 + s^2t^2 + r^2u^2 - \frac{(s^2t + r^2u)^2}{r^2 + s^2}}{2r^2s^2} \end{aligned}$$

x の完全平方部分は，積分した際，定数部分になるので煩雑になるのを避け，計算をあとまわしにする．それ以外の部分は，

$$-\frac{s^2t^2 + r^2u^2 - \frac{(s^2t + r^2u)^2}{r^2 + s^2}}{2r^2s^2} = -\frac{r^2s^2(t-u)^2}{2r^2s^2(r^2 + s^2)} = -\frac{(t-u)^2}{2(r^2 + s^2)}$$

つまり，(1) は，

$$e^{-\frac{(t-u)^2}{2(r^2+s^2)}} \times const$$

よって，分散は $r^2 + s^2$ ，新たな平均は u である．これは 0 と u の和である．よって，

$$h(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(r^2 + s^2)}} e^{-\frac{(t-u)^2}{2(r^2+s^2)}} \quad (2)$$

となるわけだが、e の前の定数部分はこの時点ではまだ確かめていないので計算すると、

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2\pi r s} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(r^2+s^2)\left(x-\frac{s^2 t+r^2 u}{r^2+s^2}\right)^2}{2r^2 s^2}} dx \\
 &= \frac{1}{2\pi r s} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\left(x-\frac{s^2 t+r^2 u}{r^2+s^2}\right)^2}{\frac{2r^2 s^2}{r^2+s^2}}} dx \\
 &= \frac{1}{2\pi r s} \sqrt{\frac{2r^2 s^2 \pi}{r^2+s^2}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(r^2+s^2)}}
 \end{aligned}$$

となり、(2) を導くことができた。