$1 \sim n$ の n 個の自然数から m 個の自然数を取り出すときの和の和

問題　$i, m, n, x_i \in \mathrm{N}$ とするとき，

$$D_{m,n} = \sum_{1 \leq x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_m \leq n} (x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_m) = \sum_{1 \leq x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_m \leq n} \sum_{i=1}^{m} x_i$$

を求めよ．

解　漸化式を求める．

$$\begin{aligned}
D_{m,n} =& D_{m,n-1} + \sum_{1 \leq x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_{m-1} \leq n-1} (x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{m-1} + n) \\
=& D_{m,n-1} + \sum_{1 \leq x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_{m-1} \leq n-1} (x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{m-1}) + \sum_{k=1}^{{}_{n-1}\mathrm{C}_{m-1}} n \\
D_{m,n} =& D_{m,n-1} + D_{m-1,n-1} + {}_{n-1}\mathrm{C}_{m-1} n \qquad (1)
\end{aligned}$$

(1) は $m < n$ を前提としている．$m = n$ のとき，

$$D_{n,n} = \frac{1}{2} n(n+1)$$

ここで，別の観点から予測を立てる．$D_{m,n}$ の平均は 1〜n の平均に等しいと思われるので，

$$\begin{aligned}
\frac{D_{m,n}}{m {}_{n}\mathrm{C}_{m}} &= \frac{1}{2}(n+1) \\
D_{m,n} &= {}_{n}\mathrm{C}_{m} m \frac{1}{2}(n+1) \\
&= \frac{m(n+1)!}{2m!(n-m)!} \\
&= \frac{(n+1)n(n-1)\cdots(n-m+1)}{2(m-1)!}
\end{aligned}$$

$D_{1,1} = 1$ は予測と矛盾しない．また，$m = n$ のときも同様に矛盾しない．$m < n$ のときこの予想を (1) の右辺に代入すると，

$$\begin{aligned}
& D_{m,n-1} + D_{m-1,n-1} + {}_{n-1}\mathrm{C}_{m-1} n \\
=& \frac{n(n-1)\cdots(n-m)}{2(m-1)!} + \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{2(m-2)!} + \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{(m-1)!} \\
=& \frac{n(n-1)\cdots(n-m) + (m-1)n(n-1)\cdots(n-m+1) + 2n(n-1)\cdots(n-m+1)}{2(m-1)!} \\
=& \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)(n-m+m-1+2)}{2(m-1)!} \\
=& \frac{(n+1)n(n-1)\cdots(n-m+1)}{2(m-1)!} = D_{m,n}
\end{aligned}$$

ということで，(1) は成り立っている．よって，

$$\boxed{\begin{aligned}&D_{m,n} = \sum_{1\le x_1<x_2<x_3<\cdots<x_m\le n}(x_1+x_2+x_3+\cdots+x_m)\\ &= \sum_{1\le x_1<x_2<x_3<\cdots<x_m\le n}\sum_{i=1}^{m} x_i\\ &= \frac{(n+1)n(n-1)\cdots(n-m+1)}{2(m-1)!}\end{aligned}}$$

書きかたを変えると,

$$\boxed{D_{m,n} = \frac{(n+1)n}{2}{}_{n-1}\mathrm{C}_{m-1}}$$

または,

$$\boxed{D_{m,n} = \frac{(m+1)m}{2}{}_{n+1}\mathrm{C}_{m+1}}$$

または,

$$\boxed{D_{m,n} = \frac{(n+1)}{2m}{}_{n}\mathrm{C}_{m}}$$

などと書き表せる．特に,

$$\boxed{D_{1,n} = D_{n,n} = \frac{(n+1)n}{2}, D_{n-1,n} = \frac{(n+1)n(n-1)}{2}}$$