1〜n の n 個の自然数の中から m 個を取り出したときの和の 2 乗和

問題　$i, m, n, x_i \in \boldsymbol{N}$ とするとき，

$$S_{m,n} = \sum_{1 \leq x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_m \leq n} (x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_m)^2 \qquad = \sum_{1 \leq x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_m \leq n} \left(\sum_{i=1}^{m} x_i \right)^2$$

を求めよ．

解　漸化式を求める．

$$\begin{aligned} &S_{m,n} \\ =&S_{m,n-1} + \sum_{1 \leq x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_{m-1} \leq n-1} (x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{m-1} + n)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = S_{m,n-1} \\ &+ \sum_{1 \leq x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_{m-1} \leq n-1} \left\{ (x_1 + x_2 + \cdots + x_{m-1})^2 + 2n(x_1 + x_2 + \cdots + x_{m-1}) + n^2 \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = S_{m,n-1} + \sum_{1 \leq x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_{m-1} \leq n-1} (x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{m-1})^2 \\ + 2n \sum_{1 \leq x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_{m-1} \leq n-1} (x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{m-1}) + {}_{n-1}C_{m-1} n^2 \\ = S_{m,n-1} + S_{m-1,n-1} + 2nD_{m-1,n-1} + {}_{n-1}C_{m-1} n^2 \end{aligned}$$

ただし

$$D_{m,n} = \sum_{1 \leq x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_m \leq n} (x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_m) = \frac{(n+1)n(n-1)\cdots(n-m+1)}{2(m-1)!}$$

である．よって，

$$\begin{aligned} S_{m,n} &= S_{m,n-1} + S_{m-1,n-1} + 2nD_{m-1,n-1} + {}_{n-1}C_{m-1} n^2 \\ &= S_{m,n-1} + S_{m-1,n-1} + \frac{n^2(n-1)\cdots(n-m+1)}{(m-2)!} + \frac{n^2(n-1)\cdots(n-m+1)}{(m-1)!} \\ S_{m,n} &= S_{m,n-1} + S_{m-1,n-1} + \frac{mn^2(n-1)\cdots(n-m+1)}{(m-1)!} \qquad (1) \end{aligned}$$

(1) は $m < n$ を前提としている．$m = n$ のとき，

$$S_{n,n} = \left\{ \frac{1}{2} n(n+1) \right\}^2$$

ここで，母分散と，標本平均の分散の関係から予測を立てる．母分散を σ^2 標本平均の分散を s^2 とすると，

$$
\begin{aligned}
\frac{s^2}{\sigma^2} &= \frac{n-m}{m(n-1)} \\
\sigma^2 &= \frac{1}{6}(n+1)(2n+1) - \left\{\frac{1}{2}(n+1)\right\}^2 \\
&= \frac{1}{12}(n+1)\left\{2(2n+1)-3(n+1)\right\} \\
&= \frac{1}{12}(n+1)(n-1) \\
s^2 &= \frac{n-m}{m(n-1)} \cdot \frac{1}{12}(n+1)(n-1) \\
&= \frac{(n-m)(n+1)}{12m} \\
s^2 &= \frac{S_{m,n}}{{}_n\mathrm{C}_m m^2} - \frac{1}{4}(n+1)^2 \\
\frac{S_{m,n}}{{}_n\mathrm{C}_m m^2} &= \frac{(n-m)(n+1)}{12m} + \frac{1}{4}(n+1)^2 \\
&= \frac{1}{12}(n+1)\left\{\frac{1}{m}(n-m)+3(n+1)\right\} \\
&= \frac{1}{12m}(n+1)\left\{(n-m)+3m(n+1)\right\} \\
&= \frac{1}{12m}(n+1)\left\{(3m+1)n+2m\right\} \\
S_{m,n} &= \frac{1}{12m}(n+1)\left\{(3m+1)n+2m\right\} \cdot {}_n\mathrm{C}_m m^2 \\
&= \frac{1}{12}(n+1)\left\{(3m+1)n+2m\right\} \cdot {}_n\mathrm{C}_m m \\
&= \frac{(n+1)n(n-1)\cdots(n-m+1)\left\{(3m+1)n+2m\right\}}{12(m-1)!}
\end{aligned}
$$

$S_{1,1}=1$ は予測と矛盾しない．また，$m=n$ のときも

$$
S_{n,n} = \frac{(n+1)!\left\{(3n+1)n+2n\right\}}{12(n-1)!} = \frac{(n+1)!(3n^2+3n)}{12(n-1)!} = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2
$$

となり，同様に矛盾しない．$m<n$ のときこの予想を (1) の右辺に代入すると，

$$
S_{m,n} = S_{m,n-1} + S_{m-1,n-1} + \frac{mn^2(n-1)\cdots(n-m+1)}{(m-1)!}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{n(n-1)\cdots(n-m)\left\{(3m+1)(n-1)+2m\right\}}{12(m-1)!} \\
&\qquad + \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)\left\{(3m-2)(n-1)+2m-2\right\}}{12(m-2)!} + \frac{mn^2(n-1)\cdots(n-m+1)}{(m-1)!}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{n(n-1)\cdots(n-m)(3mn+n-m-1)}{12(m-1)!} \\
&\qquad + \frac{(m-1)n(n-1)\cdots(n-m+1)(3mn-2n-m)}{12(m-1)!} + \frac{12mn^2(n-1)\cdots(n-m+1)}{12(m-1)!}
\end{aligned}
$$

$$= \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)\left\{(3mn+n-m-1)(n-m)+(3mn-2n-m)(m-1)+12mn\right\}}{12(m-1)!}$$

$$= \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{12(m-1)!}$$
$$\times\left(3mn^2+n^2-mn-n-3m^2n-mn+m^2+m+3m^2n-2mn-m^2-3mn+2n+m+12mn\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)(3mn^2+n^2+2m+n+5mn)}{12(m-1)!}\\
&= \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)\left\{m(3n^2+5n+2)+n(n+1)\right\}}{12(m-1)!}\\
&= \frac{(n+1)n(n-1)\cdots(n-m+1)\left\{m(3n+2)+n\right\}}{12(m-1)!}
\end{aligned}$$

ということで，(1) は成り立っている．よって，

$$\begin{aligned}
S_{m,n} &= \sum_{1\leq x_1<x_2<x_3<\cdots<x_m\leq n}(x_1+x_2+x_3+\cdots+x_m)^2\\
&= \sum_{1\leq x_1<x_2<x_3<\cdots<x_m\leq n}\left(\sum_{i=1}^{m}x_i\right)^2\\
&= \frac{(n+1)n(n-1)\cdots(n-m+1)\left\{(3m+1)n+2m\right\}}{12(m-1)!} \qquad (2)
\end{aligned}$$

特に，

$$\begin{aligned}
S_{1,n} &= \frac{(n+1)n(2n+1)}{6}, & S_{2,n} &= \frac{(n+1)n(n-1)(7n+4)}{12}\\
S_{3,n} &= \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)(5n+3)}{12}, & S_{n,n} &= \frac{(n+1)^2n^2}{4}\\
S_{n-1,n} &= \frac{(n+1)n(n-1)(3n^2-2)}{12}, & S_{n-2,n} &= \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)(3n^2-3n-4)}{24}
\end{aligned}$$

(2) は $S_{m,n}=D_{m,n}\left\{(3m+1)n+2m\right\}$ と書き表せるように，これらの式はいろいろな記述法が考えられる．