サイコロの問題（共分散および相関係数）

問題 1 6 面体のサイコロを n 回投げたとき 1 の目が出る回数を X, 奇数の目が出る回数を Z とするとき $\mathrm{COV}(X,Z)$ を求めよ.

[**解**]

$$
\begin{aligned}
\mathrm{COV}(XZ) &= \mathrm{E}\left[\left(X-\frac{n}{6}\right)\left(Z-\frac{n}{2}\right)\right] \\
&= \sum_{Z=0}^{n}\sum_{X=0}^{Z}\left(X-\frac{n}{6}\right)\left(Z-\frac{n}{2}\right){}_n\mathrm{C}_Z\left(\frac{1}{2}\right)^n {}_Z\mathrm{C}_X\left(\frac{1}{3}\right)^X\left(\frac{2}{3}\right)^{Z-X} \\
&= \sum_{Z=0}^{n}\left(Z-\frac{n}{2}\right){}_n\mathrm{C}_Z\left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{X=0}^{Z}\left(X-\frac{n}{6}\right){}_Z\mathrm{C}_X\left(\frac{1}{3}\right)^X\left(\frac{2}{3}\right)^{Z-X} \\
&= \sum_{Z=0}^{n}\left(Z-\frac{n}{2}\right){}_n\mathrm{C}_Z\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\sum_{X=0}^{Z}X{}_Z\mathrm{C}_X\left(\frac{1}{3}\right)^X\left(\frac{2}{3}\right)^{Z-X}\text{-}\frac{n}{6}\sum_{X=0}^{Z}{}_Z\mathrm{C}_X\left(\frac{1}{3}\right)^X\left(\frac{2}{3}\right)^{Z-X}\right) \\
&= \sum_{Z=0}^{n}\left(Z-\frac{\mathrm{n}}{2}\right){}_n\mathrm{C}_Z\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{Z}{3}\text{-}\frac{n}{6}\right) \\
&= \frac{1}{3}\sum_{Z=0}^{n}\left(Z-\frac{\mathrm{n}}{2}\right)^2{}_n\mathrm{C}_Z\left(\frac{1}{2}\right)^n \\
&= \frac{1}{3}n\left(\frac{1}{2}\right)^2 \\
&= \frac{n}{12}
\end{aligned}
$$

Z の分散は $\frac{n}{4}$, X の分散は $n\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}=\frac{5n}{36}$ だから, X,Z の相関係数は,

$$
\frac{\frac{\mathrm{n}}{12}}{\sqrt{\frac{n}{4}\cdot\frac{5n}{36}}}=\frac{18}{12\sqrt{5}}
$$