サイコロの問題（期待値）

問題 1 サイコロを最高 6 回振る．ある時点でやめれば，最後に出た目が得点となる．続けて振って，出た目が直前の目の数以下なら終了し，最後の目が得点となる．このゲームの最良の戦略を考察せよ．

[解] 出た目の数が m のとき，最良の戦略をとった場合の期待値を $E(m)$ とする．6 が出たときは当然やめるのが最良で

$$E(6) = 6$$

である．5 のときはもしやめないで続けると期待値は

$$\frac{6}{6} + \frac{5}{6} + \frac{4}{6} + \frac{3}{6} + \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{7}{2} = 3.5$$

であるからやめたほうが賢明である．4 のときも同様である．

$$E(5) = 5, E(4) = 4$$

3 のときは続けたほうが賢明である．期待値は

$$E(3) = \frac{7}{2} = 3.5$$

2 のときはやはり続けるべきである．期待値は

$$E(2) = \frac{6}{6} + \frac{5}{6} + \frac{4}{6} + \frac{7}{12} + \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{43}{12} \cong 3.583\cdots$$

1 のときも当然続けるべきで期待値は

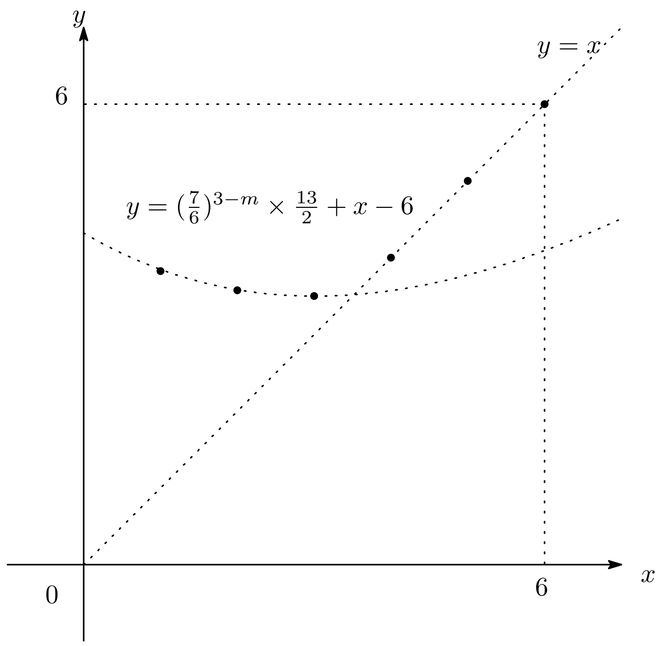
$$E(1) = \frac{6}{6} + \frac{5}{6} + \frac{4}{6} + \frac{7}{12} + \frac{43}{72} + \frac{1}{6} = \frac{277}{72} \cong 3.8472\cdots$$

つまり 4 以上の目が出た時点でやめて，それ以外は続行するのが最良の戦略である．

問題 2 最良の戦略をとった場合，このゲームの期待値を求めよ．

[解] 求める期待値は

$$\frac{1}{6}\left(6 + 5 + 4 + \frac{7}{2} + \frac{43}{12} + \frac{277}{72}\right) = \frac{1867}{432} \cong 4.32175925925926$$



問題 3 これらの問題を n 面体のサイコロに拡張し，なおかつ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{m=1}^{n} E(m)$$

を求めよ．

[解] 最良の戦略は $\dfrac{n}{2}$ より大きい目が出た場合はゲームを終了し，それ以外では続けるのが最良である．これは n が偶数でも奇数でも同じことが言える．n が奇数の場合はちょうど真ん中の $\dfrac{n+1}{2}$ の目が出たときにはゲームを終了しても続行しても期待値は同じである．つまり $m > \dfrac{n}{2}$ では

$$E(m) = m$$

である．ここで n が偶数の場合と奇数の場合で分けて考えてみよう．まず n が偶数の場合，$m = \dfrac{n}{2}$ のとき

$$E(m) = E\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{n+1}{2} \tag{1}$$

$m < \dfrac{n}{2}$ のとき

$$nE(m) = 1 + 2 + 3 + \cdots + m + E(m+1) + E(m+2) + \cdots + E(n) \tag{2}$$
$$nE(m+1) = 1 + 2 + 3 + \cdots + m + (m+1) + E(m+2) + \cdots + E(n) \tag{3}$$

(2)-(3) より

$$nE(m) - nE(m+1) = E(m+1) - (m+1)$$

$$n\left\{E(m) - m + n\right\} = (n+1)\left\{E(m+1) - (m+1) + n\right\}$$

$$\frac{E(m) - m + n}{E(m+1) - (m+1) + n} = \frac{n+1}{n}$$

$$\therefore \frac{E(m)-m+n}{E\left(\frac{n}{2}\right)-\frac{n}{2}+n}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{n}{2}-m}$$

(1) より

$$E(m)-m+n=\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{n}{2}-m}\left\{\frac{n+1}{2}-\frac{n}{2}+n\right\}$$

$$\therefore E(m)=\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{n}{2}-m}\frac{2n+1}{2}+m-n$$

ゲーム全体の期待値は

$$\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}E(m)$$

求める極限値 E は

$$E=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{m=1}^{n}E(m)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{m=1}^{\frac{n}{2}}E(m)+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{m=\frac{n}{2}+1}^{n}E(m)$$

$$E_1=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{m=1}^{\frac{n}{2}}E(m), E_2=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{m=\frac{n}{2}+1}^{n}E(m)$$

とおくと,

$$\begin{aligned}
E_1&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{m=1}^{\frac{n}{2}}\left\{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{n}{2}-m}\frac{2n+1}{2}+m-n\right\}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{\frac{n}{2}}\left\{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{n}{2}-m}\frac{2n+1}{2n}+\frac{m}{n}-1\right\}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{\frac{n}{2}}\left\{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n}\right)^{\frac{m}{n}}\frac{2n+1}{2n}+\frac{m}{n}-1\right\}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{\frac{n}{2}}\left(\sqrt{e}e^{-\frac{m}{n}}+\frac{m}{n}-1\right)\\
&=\int_0^{\frac{1}{2}}(\sqrt{e}e^{-x}+x-1)dx\\
&=\left[-\sqrt{e}e^{-x}+\frac{x^2}{2}-x\right]_0^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}-\frac{11}{8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_1&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{m=\frac{n+1}{2}}^{n}m\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{m=\frac{n+1}{2}}^{n}\frac{m}{n}\\
&=\int_{\frac{1}{2}}^{1}xdx=\frac{3}{8}
\end{aligned}$$

よって求める極限値は

$$E = \sqrt{e} - 1 \simeq 0.64872127070013$$

n が奇数としてもあまり変りはないが一応記述しておく．$m = \dfrac{n+1}{2}$ のとき前述のとおり

$$E(m) = E\left(\frac{n+1}{2}\right) = \frac{n+1}{2} \tag{4}$$

$m < \dfrac{n+1}{2}$ のとき

$$nE(m) = 1 + 2 + 3 + \cdots + m + E(m+1) + E(m+2) + \cdots + E(n) \tag{5}$$
$$nE(m+1) = 1 + 2 + 3 + \cdots + m + (m+1) + E(m+2) + \cdots + E(n) \tag{6}$$

(5)-(6) より

$$nE(m) - nE(m+1) = E(m+1) - (m+1)$$

$$n\left\{E(m) - m + n\right\} = (n+1)\left\{E(m+1) - (m+1) + n\right\}$$

$$\frac{E(m) - m + n}{E(m+1) - (m+1) + n} = \frac{n+1}{n}$$

$$\therefore \frac{E(m) - m + n}{E\left(\frac{n+1}{2}\right) - \frac{n+1}{2} + n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{n+1}{2} - m}$$

(4) より

$$E(m) - m + n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{n+1}{2} - m} n$$

$$\therefore E(m) = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{n+1}{2} - m} n + m - n$$

求める極限値 E は

$$E = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{m=1}^{n} E(m) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{m=1}^{\frac{n+1}{2}} E(m) + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{m=\frac{n+3}{2}}^{n} E(m)$$

$$E_1 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{m=1}^{\frac{n+1}{2}} E(m), E_2 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{m=\frac{n+3}{2}}^{n} E(m)$$

とおくと,

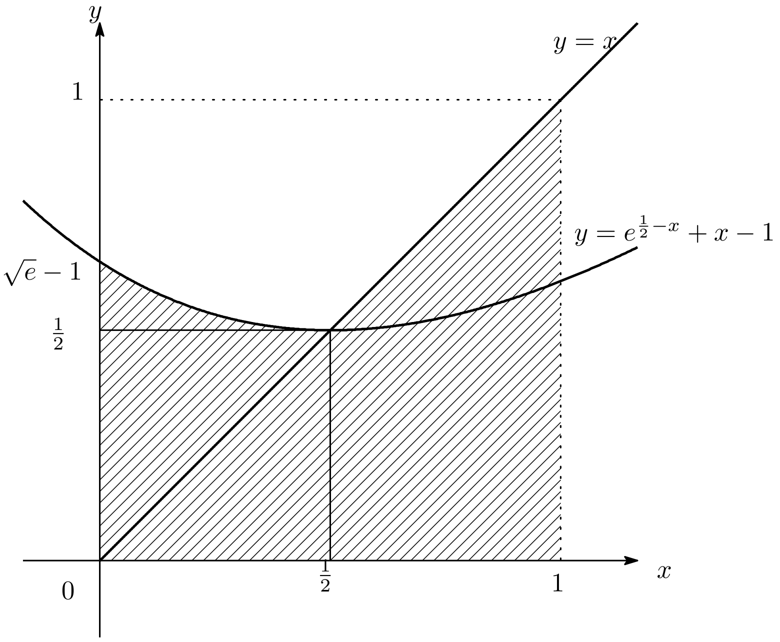
$$\begin{aligned}
E_1 &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{m=1}^{\frac{n+1}{2}}\left\{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}-m}n+m-n\right\}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{\frac{n+1}{2}}\left\{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}-m}+\frac{m}{n}-1\right\}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{\frac{n+1}{2}}\left\{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n}\right)^{\frac{m}{n}}+\frac{m}{n}-1\right\}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{\frac{n+1}{2}}\left(\sqrt{e}e^{-\frac{m}{n}}+\frac{m}{n}-1\right)\\
&= \int_0^{\frac{1}{2}}(\sqrt{e}e^{-x}+x-1)dx\\
&= \left[-\sqrt{e}e^{-x}+\frac{x^2}{2}-x\right]_0^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}-\frac{11}{8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_1 &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{m=\frac{n+3}{2}}^{n}m\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{m=\frac{n+3}{2}}^{n}\frac{m}{n}\\
&= \int_{\frac{1}{2}}^{1}xdx=\frac{3}{8}
\end{aligned}$$

よって求める極限値は

$$E=\sqrt{e}-1\simeq 0.64872127070013$$

n が偶数・奇数によらず同じ極限値をとる.



[感想]　答がきれいなのでもっときれいに解けるのでしょうが，私にはこれが限界です．