確率の問題を解くために必要な二項係数および数列に関する公式

定義 1.

$$\boxed{{}_nC_x = \frac{n!}{x!(n-x)!} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(x+1)\Gamma(n-x+1)}}$$

定理 1.

$$\boxed{\sum_{x=0}^{n} x^2{}_nC_x = 2^{n-2}(n^2+n)\cdots(0)}$$

［証明］

$$\begin{aligned}
\sum_{x=0}^{n} x^2{}_nC_x &= \sum_{x=0}^{n} x^2\frac{n!}{x!(n-x)!} \\
&= \sum_{x=0}^{n} \frac{(x-1)n!+n!}{(x-1)!(n-x)!} \\
&= \sum_{x=0}^{n} \frac{n!}{(x-2)!(n-x)!} + \sum_{x=0}^{n} \frac{n!}{(x-1)!(n-x)!} \\
&= \sum_{x=0}^{n} n(n-1){}_{n-2}C_{x-2} + \sum_{x=0}^{n} n{}_{n-1}C_{x-1} \\
&= n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1} \\
&= 2^{n-2}(n^2-n+2n) \\
&= 2^{n-2}(n^2+n)
\end{aligned}$$

［証明おわり］

定理 2.

$$\boxed{\sum_{x=0}^{n} {}_nC_x p^x q^{n-x} = (p+q)^n \cdots(1)}$$

［証明略］

定理 3.

$$\boxed{\sum_{x=0}^{n} x{}_nC_x p^x q^{n-x} = np(p+q)^{n-1} \cdots(2)}$$

［証明］(1) の両辺を p で微分して,

$$\sum_{x=0}^{n} x{}_nC_x p^{x-1} q^{n-x} = n(p+q)^{n-1}$$

両辺に p をかけて，

$$\sum_{x=0}^{n} x_nC_xp^xq^{n-x} = np(p+q)^{n-1}$$

［証明おわり］

とくに，$p = q$=1 のとき，

$$\boxed{\sum_{x=0}^{n} x_nC_x = n2^{n-1}}$$

とくに，$p + q$=1 のとき，

$$\boxed{\sum_{x=0}^{n} x_nC_xp^xq^{n-x} = np}$$

これは二項分布の期待値を表す．1 回行うときの期待値が p であり，その独立試行を n 回行い，期待値が n 倍になることを示す．

定理 4．二項分布の分散

$$\boxed{\sum_{x=0}^{n} x^2{}_nC_xp^xq^{n-x} - (np)^2 = np(1-p)}$$

［証明］(2) の両辺を p で微分して，

$$\sum_{x=0}^{n} x^2{}_nC_xp^{x-1}q^{n-x} = n(p+q)^{n-1} + n(n-1)p(p+q)^{n-2}$$

両辺に p をかけて，

$$\begin{aligned}\sum_{x=0}^{n} x^2{}_nC_xp^xq^{n-x} &= np(p+q)^{n-1} + n(n-1)p^2(p+q)^{n-2} \\ &= np(p+q)^{n-2}(p+q+pn-p) \\ &= np(p+q)^{n-2}(pn+q)\end{aligned}$$

$p = q$=1 のときは上記 (0) に等しい．

$p + q$=1 のとき，

$$\sum_{x=0}^{n} x^2{}_nC_xp^xq^{n-x} = np(pn+1-p)$$

$$\therefore \sum_{x=0}^{n} x^2{}_nC_xp^xq^{n-x} - (np)^2 = np(1-p)$$

［証明おわり］

これは 1 回行うときの期待値が $p(1-p)$ であり，その独立試行を n 回行い，分散が n 倍になることを示している．

定理 5．

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} kr^{k-1} = \frac{1}{(1-r)^2} \cdots (3)}$$

［証明］

$$
\begin{aligned}
S &= \sum_{k=1}^{\infty} kr^{k-1} \\
&= 1 + 2r + 3r^2 + \cdots + kr^{n-1} \cdots \\
rS &= r + 2r^2 + 3r^3 + \cdots + kr \cdots \\
(1-r)S &= 1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1} \cdots \\
&= \frac{1}{1-r} \\
S &= \frac{1}{(1-r)^2}
\end{aligned}
$$

［証明おわり］

両辺を r 倍して

$$
\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} kr^k = \frac{r}{(1-r)^2}}
$$

定理 6.

$$
\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} k^2 r^{k-1} = \frac{1+r}{(1-r)^3}}
$$

［証明］

$$
\begin{aligned}
S &= \sum_{k=1}^{\infty} k^2 r^{k-1} \\
&= 1 + 2^2 r + 3^2 r^2 + \cdots + k^2 r^{n-1} \cdots \\
rS &= r + 2^2 r^2 + 3^2 r^3 + \cdots + k^2 r \cdots \\
(1-r)S &= 1 + 3r + 5r^2 + \cdots + (2n-1) r^{n-1} \cdots \\
r(1-r)S &= r + 3r^2 + 5r^3 + \cdots + (2n-1) r \cdots \\
(1-r)^2 S &= 1 + 2r + 2r^2 + \cdots + 2r^{n-1} \cdots \\
&= 1 + \frac{2r}{1-r} \\
&= \frac{1+r}{1-r} \\
\therefore S &= \frac{1+r}{(1-r)^3}
\end{aligned}
$$

［証明おわり］

両辺を r 倍して

$$
\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} k^2 r^k = \frac{r(1+r)}{(1-r)^3}}
$$

定理 7. 幾何分布の期待値

確率密度関数を $f(x) = p(1-p)^{x-1}$ とする．期待値は，$\frac{1}{p}$ である．

［証明］

$$E(x) = \sum xp(1-p)^{x-1} = p\sum x(1-p)^{x-1}$$

公式 (3) より，

$$E(x) = p\frac{1}{p^2} = \frac{1}{p}$$

［証明おわり］