マルコフ過程について

問題　ある国では 3 種類の車 A.B.C を購入することができる．国民は買い替えの度にどれかを購入するが，前と同じ車を買うとは限らない． A 車の所有者でそのまま A 車を買う人は 6 割，B 車に乗り換える人は 3 割，C 車に乗り換える人は 1 割である．B 車に乗っている人は 5 割がそのまま B 車に，2 割が C 車に，3 割が A 車に乗り換える．C 車に乗っている人は 4 割がそのまま C 車に，2 割が A 車に，4 割が B 車に乗り換えるという．以下の問いに答えよ．

(1) 推移確率行列をかけ．
(2) 現在の各車のシェアは A 車が 1 割，B 車が 4 割，C 車が 5 割である．国民が同じ周期で車を買い替えるとすれば，3 回目の買い替えが終了した時のシェアはどのようになっているか？
(3) このような買い替えの傾向が続けば最終的に各車のシェアはどうなるか？

解

(1) 求める行列を M とすると，

$$M = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.3 & 0.1 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 \end{pmatrix}$$

(2) $S = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.4 & 0.5 \end{pmatrix}$ とすると，

$$\begin{aligned} SA^3 &= \begin{pmatrix} 0.1 & 0.4 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.6 & 0.3 & 0.1 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 \end{pmatrix}^3 \\ &= \begin{pmatrix} 0.1 & 0.4 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.425 & 0.39 & 0.185 \\ 0.39 & 0.405 & 0.205 \\ 0.37 & 0.41 & 0.22 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0.3835 & 0.406 & 0.2105 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

この時点ですでに傾向が見て取れる．

(3) $S = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$ とすると，$SA = S$ つまり，

$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.6 & 0.3 & 0.1 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$$

かつ

$$a + b + c = 1$$

を解いて

$$S = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.4 & 0.2 \end{pmatrix}$$

同じ問題について，線形代数の立場からアプローチしてみよう．

問題　$A=\begin{pmatrix}0.6 & 0.3 & 0.1\\ 0.3 & 0.5 & 0.2\\ 0.2 & 0.4 & 0.4\end{pmatrix}$ のとき，次の問いに答えよ．

(1) 固有値を求めよ

(2) 固有値に属する固有空間の基底をもとめよ

(3) A を対角化し，n 乗行列の極限を求めよ．

解

(1) A の固有多項式は,

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} 0.6-\lambda & 0.3 & 0.1 \\ 0.3 & 0.5-\lambda & 0.2 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4-\lambda \end{vmatrix}\\
=&\frac{1}{1000}\times\{(6-10\lambda)(5-10\lambda)(4-10\lambda)+24-8(6-10\lambda)-3(5-10\lambda)-9(4-10\lambda)\}\\
=&\frac{1}{1000}\times\left\{(10\lambda)^3-15\,(10\lambda)^2+55\cdot 10\lambda-50\right\}
\end{aligned}$$

固有値は $\lambda=1,\dfrac{5\pm\sqrt{5}}{20}$ （検算省略）

(2) $\lambda=1$ のとき,

$$\begin{pmatrix} -0.4 & 0.3 & 0.1 \\ 0.3 & -0.5 & 0.2 \\ 0.2 & 0.4 & -0.6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\mathbf{0} \qquad \left(\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\neq\mathbf{0}\right)$$

を解く．

$$\begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \\ 2 & 4 & -6 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 0 & 11 & -11 \\ 0 & -11 & 11 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}(k,l\neq 0)$$

$\lambda=1$ に属する固有空間の基底は,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda = \dfrac{\sqrt{5}+5}{20}$ のとき,

$$\begin{pmatrix} \dfrac{7-\sqrt{5}}{20} & 0.3 & 0.1 \\ 0.3 & \dfrac{5-\sqrt{5}}{20} & 0.2 \\ 0.2 & 0.4 & \dfrac{3-\sqrt{5}}{20} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{0} \qquad (\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0})$$

を解く.

$$\begin{pmatrix} \dfrac{7-\sqrt{5}}{20} & 0.3 & 0.1 \\ 0.3 & \dfrac{5-\sqrt{5}}{20} & 0.2 \\ 0.2 & 0.4 & \dfrac{3-\sqrt{5}}{20} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \dfrac{7-\sqrt{5}}{2} & 3 & 1 \\ 3 & \dfrac{5-\sqrt{5}}{2} & 2 \\ 1 & 2 & \dfrac{3-\sqrt{5}}{4} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dfrac{3-\sqrt{5}}{4} \\ 3 & \dfrac{5-\sqrt{5}}{2} & 2 \\ \dfrac{7-\sqrt{5}}{2} & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dfrac{3-\sqrt{5}}{4} \\ 0 & -7-\sqrt{5} & \dfrac{-1+3\sqrt{5}}{2} \\ 0 & -4+\sqrt{5} & \dfrac{-9+5\sqrt{5}}{4} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dfrac{1+\sqrt{5}}{4} \\ 0 & 1 & \dfrac{1-\sqrt{5}}{4} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} \dfrac{1+\sqrt{5}}{4} \\ \dfrac{1-\sqrt{5}}{4} \\ -1 \end{pmatrix} (k \neq 0)$$

$\lambda = \dfrac{\sqrt{5}+5}{20}$ に属する固有空間の基底は,

$$\begin{pmatrix} \dfrac{1+\sqrt{5}}{4} \\ \dfrac{1-\sqrt{5}}{4} \\ -1 \end{pmatrix}$$

あるいは,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{\sqrt{5}-3}{2} \\ 1-\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

などとも書ける. 同様に,
$\lambda = \dfrac{5-\sqrt{5}}{20}$ に属する固有空間の基底は,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -\dfrac{\sqrt{5}+3}{2} \\ \sqrt{5}+1 \end{pmatrix}$$

対角化して，

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{5+\sqrt{5}}{20} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{5-\sqrt{5}}{20} \end{pmatrix}$$

$$\lim_{n\to\infty} B^{-1}A^nB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \dfrac{\sqrt{5}-3}{2} & \dfrac{-\sqrt{5}-3}{2} \\ 1 & 1-\sqrt{5} & 1+\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{5} & \dfrac{2}{5} & \dfrac{1}{5} \\ \dfrac{3+\sqrt{5}}{10} & -\dfrac{1}{5} & \dfrac{-1-\sqrt{5}}{10} \\ \dfrac{3-\sqrt{5}}{10} & -\dfrac{1}{5} & \dfrac{-1+\sqrt{5}}{10} \end{pmatrix}$$

より

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} A^n &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \dfrac{\sqrt{5}-3}{2} & \dfrac{-\sqrt{5}-3}{2} \\ 1 & 1-\sqrt{5} & 1+\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{2}{5} & \dfrac{2}{5} & \dfrac{1}{5} \\ \dfrac{3+\sqrt{5}}{10} & -\dfrac{1}{5} & \dfrac{-1-\sqrt{5}}{10} \\ \dfrac{3-\sqrt{5}}{10} & -\dfrac{1}{5} & \dfrac{-1+\sqrt{5}}{10} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \dfrac{2}{5} & \dfrac{2}{5} & \dfrac{1}{5} \\ \dfrac{2}{5} & \dfrac{2}{5} & \dfrac{1}{5} \\ \dfrac{2}{5} & \dfrac{2}{5} & \dfrac{1}{5} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$a+b+c=1$ のとき，

$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{2}{5} & \dfrac{2}{5} & \dfrac{1}{5} \\ \dfrac{2}{5} & \dfrac{2}{5} & \dfrac{1}{5} \\ \dfrac{2}{5} & \dfrac{2}{5} & \dfrac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{5} & \dfrac{2}{5} & \dfrac{1}{5} \end{pmatrix}$$

参考文献

[1] 薩摩順吉『確率・統計』（岩波書店，1992 年）小牧高校図書館蔵

[2] 中川義行「Maxima 入門ノート 1.2.1」<http://www.eonet.ne.jp/~kyo-ju/maxima.pdf>