確率の問題

問題　白球 15 個，赤球 4 個が箱に入っている．この箱から球を 1 個取り出す動作を繰り返す．ただし取り出した球は元に戻さない．n 回目に取り出した球がちょうど 3 個目の赤球である確率を P_n とする．P_n の最大値とそれを与える n を求めよ．

解　合計 19 個の球から $n-1$ 個 $(3 \leqq n \leqq 19)$ の球を取り出して，赤球がちょうど 2 個，白球が $n-3$ 個含まれている確率は,

$$\frac{{}_4\mathrm{C}_2 \cdot {}_{15}\mathrm{C}_{n-3}}{{}_{19}\mathrm{C}_{n-1}} \tag{1}$$

この段階で，残りの球数は

$$19-(n-1) = 20-n(\text{個}) \tag{2}$$

である．赤球は 2 個残っている．この中から 1 個の球を取り出すとき，赤球を引く確率は,

$$\frac{2}{20-n} \tag{3}$$

であるから，(1) と (3) をかけたものが P_n である．よって,

$$\begin{aligned}
P_n &= \frac{{}_4\mathrm{C}_2 \cdot {}_{15}\mathrm{C}_{n-3}}{{}_{19}\mathrm{C}_{n-1}} \cdot \frac{2}{20-n} \\
&= \frac{\dfrac{4\cdot 3}{2} \cdot \dfrac{15!}{(n-3)!(18-n)!}}{\dfrac{19!}{(n-1)!(20-n)!}} \cdot \frac{2}{20-n} \\
&= \frac{4\cdot 3}{2} \cdot \frac{15!}{(n-3)!(18-n)!} \cdot \frac{(n-1)!(20-n)!}{19!} \cdot \frac{2}{20-n} \\
&= \frac{4\cdot 3\cdot (n-1)(n-2)(20-n)(19-n)}{19\cdot 18\cdot 17\cdot 16} \cdot \frac{1}{20-n} \\
&= \frac{(n-1)(n-2)(19-n)}{19\cdot 17\cdot 3\cdot 2^3}
\end{aligned} \tag{4}$$

最大となる n を求めるには定数部分は不要なので，$(n-1)(n-2)(19-n)$ の最大を調べればよい．この式を n で微分すると,

$$\begin{aligned}
&(n-2)(19-n) + (n-1)(19-n) - (n-1)(n-2) \\
=& -n^2 + 21n - 38 - n^2 + 20n - 19 - n^2 + 3n - 2 \\
=& -3n^2 + 44n - 59
\end{aligned} \tag{5}$$

$$-3n^2 + 44n - 59 = 0 \tag{6}$$

を解くと,

$$n = \frac{22 \pm \sqrt{307}}{3} \tag{7}$$

極大（最大）となるのは,

$$n = \frac{22+\sqrt{307}}{3} = 13.1738051\cdots \tag{8}$$

最大となるのはこの値をはさむ 2 つの自然数のどちらかである．$n=13$ のとき (5) 式は 792，$n=14$ のとき 780 となるので，P_n は $n=13$ のとき最大となり，その最大値は,

$$\begin{aligned} P_n &= \frac{792}{19\cdot 17\cdot 3\cdot 2^3} \\ &= \frac{33}{19\cdot 17} \\ &= \frac{33}{323} \end{aligned} \tag{9}$$

別解　(5) 以降の計算がやや煩雑なので別の方法を試みる．(4) より,

$$P_{n-1} = \frac{(n-2)(n-3)(20-n)}{19\cdot 17\cdot 3\cdot 2^3} \tag{10}$$

不等式,

$$\frac{P_n}{P_{n-1}} \geqq 1$$

を解くと,

$$\begin{aligned} \frac{(n-1)(n-2)(19-n)}{(n-2)(n-3)(20-n)} &\geqq 1 \\ \frac{(n-1)(19-n)}{(n-3)(20-n)} &\geqq 1 \end{aligned}$$

分母をはらって,

$$\begin{aligned} (n-1)(19-n) &\geqq (n-3)(20-n) \\ -n^2+20n-19 &\geqq -n^2+23n-60 \\ 3n &\geqq 41 \\ n &\leqq \frac{41}{3} = 13.666\ldots \end{aligned} \tag{11}$$

よって P_n は $n=13$ のとき最大となる．

若干の拡張を試みる．n 回目に取り出した球がちょうど k 個目 $(1 \leqq k \leqq 4)$ の赤球である確率を P_n とし，その最大値を与える n を求めてみよう．

合計 19 個の球から $n-1$ 個 (k $\leqq n \leqq 19$) の球を取り出して，赤球がちょうど $k-1$ 個，白球が $n-k$ 個含まれている確率は,

$$\frac{{}_4\mathrm{C}_{k-1}\cdot {}_{15}\mathrm{C}_{n-k}}{{}_{19}\mathrm{C}_{n-1}} \tag{12}$$

この段階で，残りの球数は

$$19-(n-1) = 20-n(\text{個}) \tag{13}$$

である．赤球は $4-(k-1)=5-k$ 個残っている．この中から 1 個の球を取り出すとき，赤球を引く確率は，

$$\frac{5-k}{20-n} \tag{14}$$

であるから，(12) と (14) をかけたものが P_n である．よって，

$$
\begin{aligned}
P_n &= \frac{{}_4\mathrm{C}_{k-1}\cdot{}_{15}\mathrm{C}_{n-k}}{{}_{19}\mathrm{C}_{n-1}}\cdot\frac{5-k}{20-n}\\
&= \frac{\dfrac{4!}{(k-1)!(5-k)!}\cdot\dfrac{15!}{(n-k)!(15+k-n)!}}{\dfrac{19!}{(n-1)!(20-n)!}}\cdot\frac{5-k}{20-n}\\
&= \frac{4!}{(k-1)!(5-k)!}\cdot\frac{15!}{(n-k)!(15+k-n)!}\cdot\frac{(n-1)!(20-n)!}{19!}\cdot\frac{5-k}{20-n}\\
&= \frac{4!\cdot(n-1)\ldots(n-k+1)(20-n)(19-n)\ldots(16+k-n)}{(k-1)!(4-k)!19\cdot18\cdot17\cdot16}\cdot\frac{1}{20-n}\\
&= \frac{(n-1)\ldots(n-k+1)(19-n)\ldots(16+k-n)}{(k-1)!(4-k)!19\cdot17\cdot3\cdot2^2}
\end{aligned} \tag{15}
$$

分母はとりあえず増減には関係なく，分子は n についての 3 次式である．（ただ $k=1,4$ のときは (15) について微妙な解釈が残るが触れないでおこう）このまま n について微分するのは困難を覚える．よって P_{n-1} を求め P_n と比べることにより増減を把握することにする．つまり前出の**別解**の方法をとる．

$$P_{n-1}=\frac{(n-2)\ldots(n-k)(20-n)\ldots(17+k-n)}{(k-1)!(4-k)!19\cdot17\cdot3\cdot2^2} \tag{16}$$

不等式,

$$\frac{P_n}{P_{n-1}}\geqq 1$$

を解くと,

$$
\begin{aligned}
\frac{(n-1)\ldots(n-k+1)(19-n)\ldots(16+k-n)}{(n-2)\ldots(n-k)(20-n)\ldots(17+k-n)}&\geqq 1\\
\frac{(n-1)(16+k-n)}{(n-k)(20-n)}&\geqq 1
\end{aligned}
$$

$k=1,4$ のときはさきほど触れないでおいた問題が露呈していまうが，引き続きこのまま続ける．分母をはらって,

$$
\begin{aligned}
(n-1)(16+k-n)&\geqq (n-k)(20-n)\\
-n^2+(17+k)n-16-k&\geqq -n^2+(20+k)n-20k\\
3n&\leqq 19k-16\\
n&\leqq\frac{19k-16}{3}
\end{aligned} \tag{17}
$$

よって P_n は $n=\left[\dfrac{19k-16}{3}\right]$ のとき最大となる．([ ] はガウス記号) ただし (17) の等号が成り立つ場合はこの答から 1 引いた値も答として妥当である．しかしこの問題では，$k=1,4$ のときであるので，これはかなり前に戻って調べ直さなければならない．$k=1$ のときは $n=1$ が答で，$k=4$ の場合は n=19 が答となるので (17) の式がそれも包括しているといえないことはない．

さらに拡張ができないことはないが今回はここで留めておく．