正規分布の分散

以下の記述は，正規分布の確率密度関数から，正規分布の分散を計算し，確認するものである．

正規分布を，

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}r} e^{-\frac{x^2}{2r^2}}$$

とする．分散は，

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx \\
=&\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}r} e^{-\frac{x^2}{2r^2}} dx \\
=&2\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}r} e^{-\frac{x^2}{2r^2}} dx \qquad (1)
\end{aligned}$$

$\dfrac{x^2}{2r^2} = t$ とおくと，$\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{x}{r^2}$．また，$x = \sqrt{2t}r$ であるから (1) は，

$$\begin{aligned}
&2\int_0^{\infty} 2tr^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}r} e^{-t} \frac{r}{\sqrt{2t}} dt \\
=&2\int_0^{\infty} tre^{-t} \frac{r}{\sqrt{t}} dt \\
=&\frac{2r^2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} t^{\frac{1}{2}} e^{-t} dt \\
=&\frac{2r^2}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \\
=&\frac{2r^2}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \\
=&r^2
\end{aligned}$$

となり，分散は r^2 である．