行列の階数と対角化について

定理 1 $A \in M(n;F)$ が対角化可能であるための必要充分条件は，A の固有方程式

$$\Phi_A(x) = 0$$

が F において重複度を考慮して n 個の解をもち，その相異なる値を $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_s$，またそれぞれの重複度を $m_1, m_2, m_3, \cdots, m_s$ とおくとき，各 α_i に属する固有空間の次元がちょうど m_i であることである．当然のことながら

$$m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_s = n$$

である．

問題 1 a を実数とし，

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

とおく．次の問に答えよ． (神戸大学大学院数学専攻 2007)

(1) A の行列式を求めよ．
(2) 各 a について，A の階数 $\mathrm{rank}A$ を求めよ．
(3) $\mathrm{rank}A = 2$ のとき，A の固有値を求めよ．
(4) $\mathrm{rank}A = 1$ のとき，A の固有値と A の最小多項式を求めよ．

解答

(1) $|A| = -a^3 + 3a - 2 = -(a-1)^2\ (a+2)$
(2) $a \neq -2$ かつ $a \neq 1$ のとき $\mathrm{rank}A = 3$
$a = -2$ のとき

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

基本変形を繰り返すと

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{rank}A = 2 \cdots (Ans.)$$

$a = -2$ のとき

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

基本変形を行うと

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{rank}A = 1 \cdots (Ans.)$$

(3)

$$\begin{vmatrix}1-x&-2&1\\-2&1-x&1\\1&1&-2-x\end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned}-(1-x)^2(2+x)-4-2(1-x)+4(2+x)&=0\\ x(x+3)(x-3)&=0\\ x=0,\pm 3\cdots(Ans.)\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{vmatrix}1-x&1&1\\1&1-x&1\\1&1&1-x\end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned}(1-x)^3+2-3(1-x)&=0\\ x^2(x-3)&=0\\ x=0(\text{重解}),3\cdots(Ans.)\end{aligned}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix}3&3&3\\3&3&3\\3&3&3\end{pmatrix} = 3A$$

よって最小多項式は

$$A^2 - 3A \cdots (Ans.)$$

問題 2 行列 $A = \begin{pmatrix}-1&1&1\\1&1&-1\\-2&0&2\end{pmatrix}$ について以下の問いに答えよ.

(1) 行列 A の階数を求めよ.

(2) 行列 A の固有方程式を求めよ.

(3) 行列 A は対角化可能かどうかを論ぜよ.　(名古屋大学大学院多元数理 2007)

解答

(1) $\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&1&-1\\-2&0&2\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}-1&1&1\\0&2&0\\0&-2&0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

より

$$rank(A) = 2 \cdots (Ans.)$$

(2) 求める方程式は

$$\begin{vmatrix} -1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & -1 \\ -2 & 0 & 2-x \end{vmatrix} = 0$$

$$(-1-x)(1-x)(2-x)+2+2(1-x)-(2-x)=0$$
$$x^2(x-2)=0\cdots(Ans.)$$

(3) 固有値 0 に属する固有ベクトルを求める．と

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

の非自明解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

よって固有値 0 に属する固有空間は 1 次元．よって A は対角化不可能である．

参考文献

[1] 長岡亮介『線形代数入門 ('03)』（放送大学，2003 年）
[2] 長岡亮介『線形代数学』（放送大学，2004 年）