

ルーローの五角形に内接する正三角形

定理 1 ルーローの五角形の辺上の任意の点 P を一つの頂点とし，なおかつその正方形に内接する正三角形は必ずかけ，その正三角形は P について唯一である．

[証明略]

この証明は容易ではない．三角形の 1 頂点がルーローの五角形の頂点上に来る場合（図 1A）と，ルーローの五角形の辺（弧）の中点（正確には弧を二等分する点）上に来る場合（図 1B）は作図が可能であることは容易に言える．しかしそれ以外の場合でもルーローの五角形に内接する正三角形は必ずかける．その作図法は後述する．

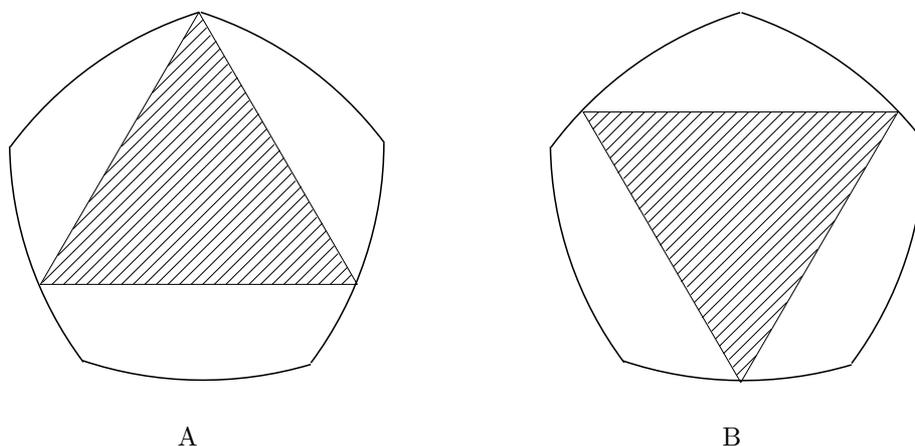


図 1

問題 1 図 1A のようなルーローの五角形に内接する正三角形の一边の長さを求めよ．ただし，ルーローの五角形と頂点を共有する正五角形の一辺の長さを 1 とする．

解 一辺の長さが 1 の正五角形の対角線の長さを g とすると，

$$g = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \tag{1}$$

である．いわゆる黄金比の値である．これは図 2 の BD の長さに等しい．また，

$$\angle CDE = (108^\circ - 60^\circ) \div 2 = 24^\circ$$

$$\angle DAB = 84^\circ$$

求める正三角形の長さを x とする． $\triangle ABD$ において余弦定理を適用すると，

$$g^2 = 1 + x^2 - 2x \cos 84^\circ$$

これを x について近似的に解くと，

$$x = 1.38083571, -1.171778784$$

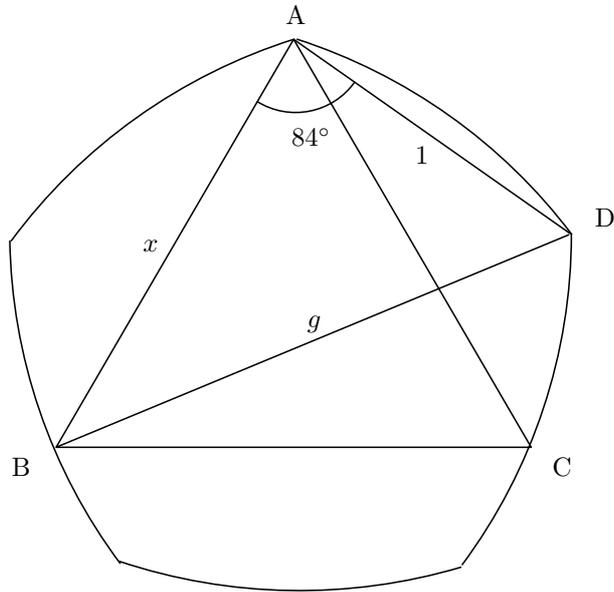


図 2

負の解は不適解である。(1)の値や,

$$\cos 84^\circ = \frac{\sqrt{6}(\sqrt{5}-1)\sqrt{\sqrt{5}+5}-2(\sqrt{5}+1)}{16}$$

を用いれば正確な値が求まるが、とんでもなく面倒な計算を強いられ、なおかつ結果は簡単でないのでやめておいたほうが賢明であろう。

この三角形がルーローの五角形に内接する正三角形のうち最大のものである。

問題 2 図 1B のようなルーローの五角形に内接する正三角形の一辺の長さを求めよ。ただし、長さの条件は問題 1 と同じとする。

解 図 3 のように x, y をおく。

$$\angle AED = \frac{36^\circ}{2} = 18^\circ$$

$\triangle DEA$ は二等辺三角形であるので、

$$\angle DEA = \angle DAE = 81^\circ$$

$$\angle BAE = 111^\circ$$

$$y = 2g \sin 9^\circ$$

$\triangle BEA$ に余弦定理を適用すると、

$$g^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos 111^\circ$$

であるから、この方程式を解くと、

$$x = 1.36605619, -1.728891241$$

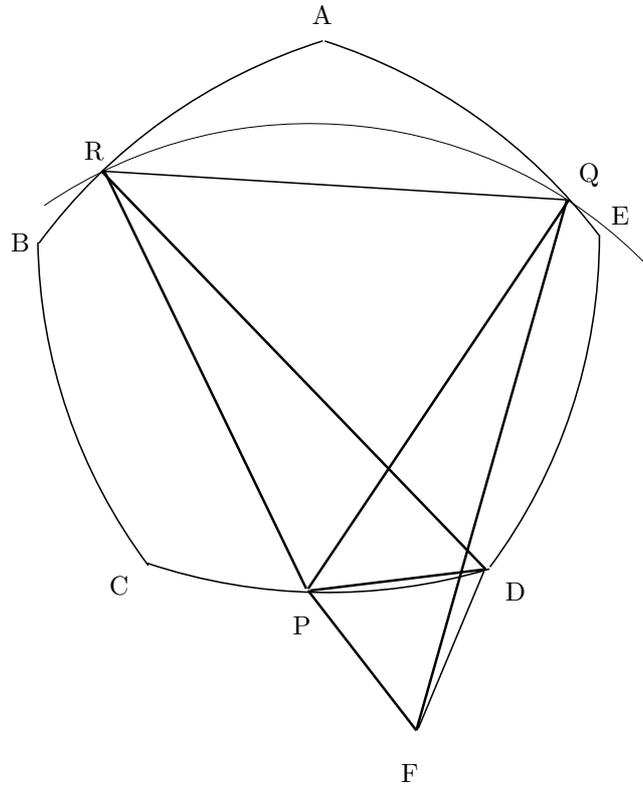


図 5

- (1) 弧 CD 上に点 P をとる .
- (2) 正三角形 DPF をルーローの五角形の外側に向けてかく .
- (3) 弧 AE 上に $FQ=1$ となるように点 Q をとる .
- (4) 弧 AB 上に $PQ=QR$ となるように点 R をとる .
- (5) PQR が求める正三角形である .

PFQ は正三角形なので

$$PD = PF$$

また ,

$$FQ = DR, FQ = FR$$

であることから ,

$$\triangle PFQ \cong \triangle PDR$$

$$\angle QPF = \angle RPD$$

$$\begin{aligned} \angle RPQ &= \angle RPD - \angle QPD \\ &= \angle QPF - \angle QPD \\ &= \angle DPF \\ &= 60^\circ \end{aligned}$$

図5の状態よりPを左にもって来ると、QはAE上にとれなくなるが、弧DE上にQをとればあとは同じである。(図6) 反対にPがより右にくると、今度はRが弧AB上にとれなくなるのでそのような場合はDPで

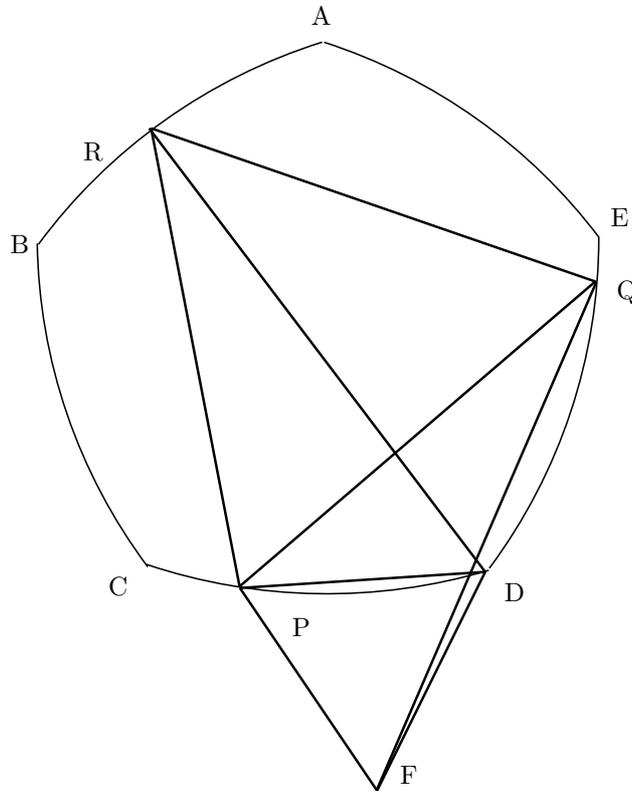


図6

はなくてCPのほうに外側に正三角形CPFを作って同じようにやればよい(図7). つまりPがCDの真ん中付近にあるときは、どちらの方法でやってもかまわないのである(図8).

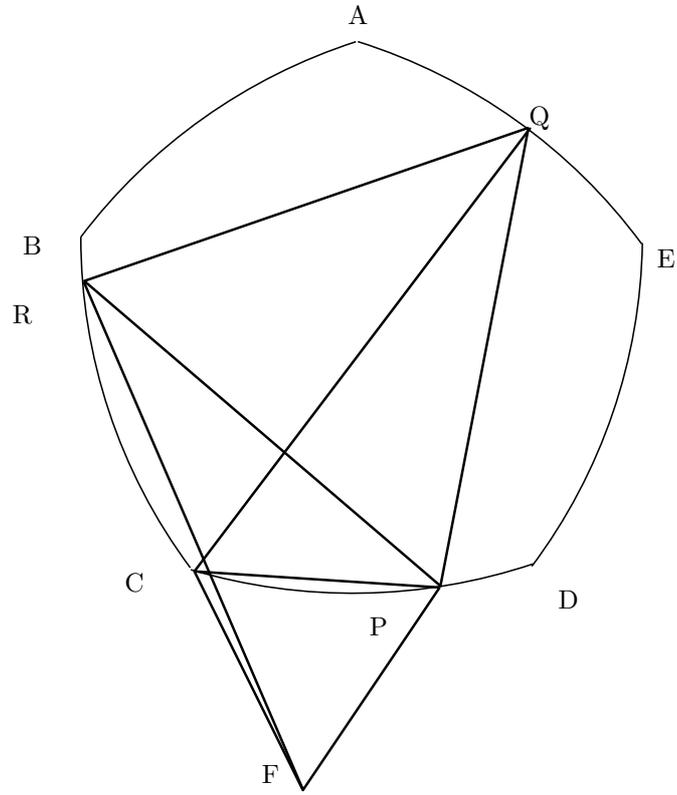


图 7

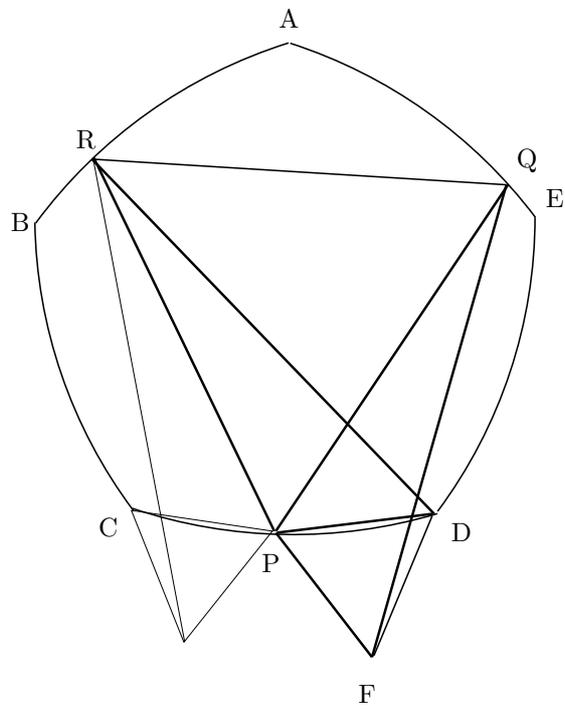


图 8