円形の滑り台

問　半径 a の半球形の滑り台の頂上から，ゆっくりと滑り降りた．着地点を求めよ．滑り台の摩擦は無視する．

解　滑り台を滑っていくと，ある地点で，滑り台から離れてしまう．速度が増していくと，遠心力が増し，重力の滑り台方向の分力より大きくなるためである．この点を求めてみよう．

円周上を速度 v で動く，座標 (x, y) 上にある質量 m の物体の遠心力は，

$$\frac{mv^2}{a} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

である．一方，重力による中心方向の分力は，

$$mg \times \frac{y}{a} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

である．この二つの力がつりあう点が，ちょうど滑り台を離れる場所である．また，エネルギー保存則より，

$$mg(a-y) = \frac{1}{2}mv^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

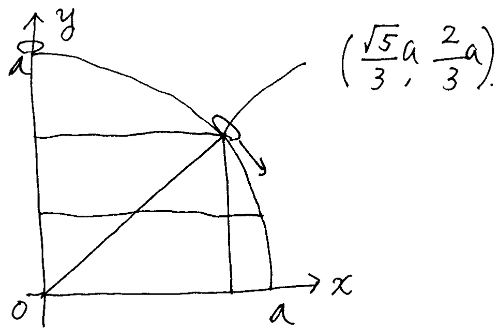

図 1

であるから，①,②,③より，

$$\begin{aligned}\frac{2mg(a-y)}{a} &= mg \times \frac{y}{a} \\ 2a - 2y &= y \\ y &= \frac{2a}{3}\end{aligned}$$

つまり，点 $\left(\dfrac{\sqrt{5}a}{3}, \dfrac{2a}{3}\right)$ を境に，物体は球面を離れ，以後放物運動をする．球面の頂上からちょうど半径の $\dfrac{1}{3}$ の地点で球面を離れるのは興味深い．これは重力加速度によらない．

離れたあとの放物線運動はどうなるか調べてみる．離れた直後の速度は，

$$v = \sqrt{\frac{2ag}{3}}$$

であるから，それぞれの成分は，

$$\begin{aligned}v_x &= \sqrt{\frac{2ag}{3}} \times \frac{2}{3} = \frac{2\sqrt{2ag}}{3\sqrt{3}} \\ v_y &= -\sqrt{\frac{2ag}{3}} \times \frac{\sqrt{5}}{3} = -\frac{\sqrt{10ag}}{3\sqrt{3}}\end{aligned}$$

よって，離れた瞬間を 0 秒とすると，以後の運動は，

$$\begin{cases} x = \dfrac{2\sqrt{2ag}}{3\sqrt{3}}t + \dfrac{\sqrt{5}}{3}a & \cdots(1) \\ y = -\dfrac{1}{2}gt^2 - \dfrac{\sqrt{10ag}}{3\sqrt{3}}t + \dfrac{2}{3}a & \cdots(2) \end{cases}$$

(1) より，

$$t = \left(x - \frac{\sqrt{5}}{3}a\right) \times \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2ag}}$$

であるから，これを (2) に代入して，

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{2}g \times \frac{27}{8ag}\left(x - \frac{\sqrt{5}}{3}a\right)^2 - \frac{\sqrt{10ag}}{3\sqrt{3}} \times \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2ag}}\left(x - \frac{\sqrt{5}}{3}a\right) + \frac{2}{3}a \\ &= -\frac{27}{16a}\left(x - \frac{\sqrt{5}}{3}a\right)^2 - \frac{\sqrt{5}}{2}\left(x - \frac{\sqrt{5}}{3}a\right) + \frac{2}{3}a \\ &= -\frac{27}{16a}x^2 - \frac{5\sqrt{5}}{8}x + \frac{9}{16}a \end{aligned}$$

$y = 0$ とおいて，着地点の x 座標を求めると，

$$x = \frac{4\sqrt{23} + 5\sqrt{5}}{27}a \cong 1.12a \ldots(答)$$

この結果も重力加速度によらない．最後にグラフを記す．

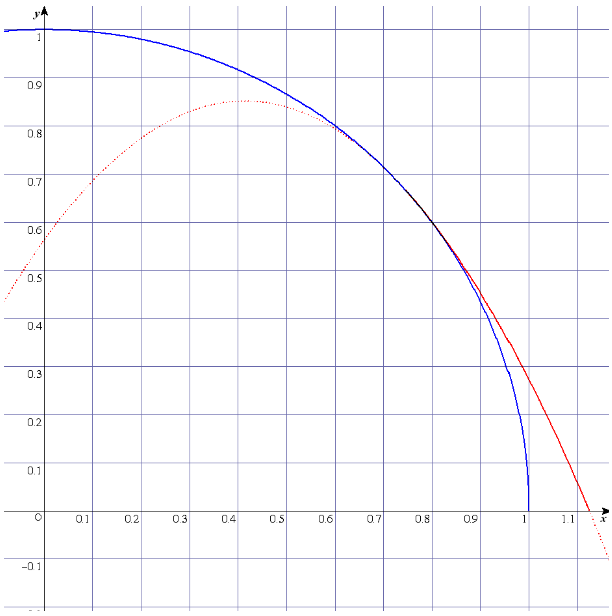

図 2