正五角形に内接する正方形

ここで内接とは，その頂点の全てが正五角形の辺または頂点上にあることをいう．よって，4 点のうち 3 点が辺上にあって，残る 1 点が内部にあるような状態を指さない．

定理 1　正五角形に内接する正方形は 5 つであり，それらは合同である．

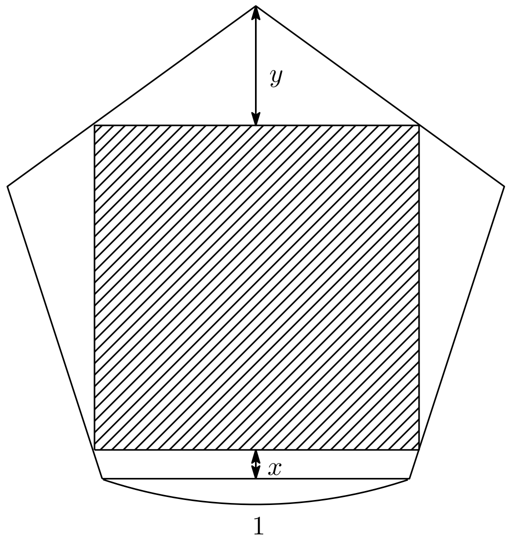

図 1

このような正方形を実際にコンパスと定規だけで作図することは困難をともなうが，図 1 のような正方形が 5 個かけることは容易に想像がつく．実際どのくらいの大きさの正方形になるのか調べてみよう．

図 1 のように五角形の一辺の長さを 1 とし，x, y の長さを決めると，

$$1 + 2x\tan 18^\circ = 2y\tan 54^\circ = \sin 72^\circ + \sin 36^\circ - x - y$$

これは x, y についての連立 1 次方程式である．

$$\tan 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2\sqrt{5}\left(\sqrt{5}+1\right)}}$$

$$\tan 54^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{2\sqrt{5}\left(\sqrt{5}-1\right)}}$$

$$\sin 36^\circ = \frac{\sqrt{2\sqrt{5}\left(\sqrt{5}-1\right)}}{4}$$

$$\sin 72^\circ = \frac{\sqrt{2\sqrt{5}\left(\sqrt{5}+1\right)}}{4}$$

を用いて方程式は完全に解ける．しかしその繁雑な計算は数式処理ソフトにでもまかせるとして，概数を求め

てみよう．wxMaxima で計算した結果をそのまま示す．

$$x=\frac{\tan\frac{3\,\pi}{10}\,\left(2\,\sin\frac{2\,\pi}{5}+2\,\sin\frac{\pi}{5}-2\right)-1}{\left(4\,\tan\frac{\pi}{10}+2\right)\,\tan\frac{3\,\pi}{10}+2\,\tan\frac{\pi}{10}},y=\frac{\tan\frac{\pi}{10}\,\left(2\,\sin\frac{2\,\pi}{5}+2\,\sin\frac{\pi}{5}\right)+1}{\left(4\,\tan\frac{\pi}{10}+2\right)\,\tan\frac{3\,\pi}{10}+2\,\tan\frac{\pi}{10}}$$

$$x=0.09309603821536,y=0.38524825745742$$

正方形の一辺の長さは，

$$1.060497472914847$$

となる．

正五角形に内接する正方形は実際にかけることが確かめられたが，これ以外に内接する正方形がかけないことを言わなければ定理 1 は証明できたことにはならない．このことの概略を示す．

まず，座標平面上で原点をその頂点の一つとする正方形の他の 3 点の座標は図 2 のようになる．点 A の座標が決まれば他の頂点の座標は自動的に決まる．

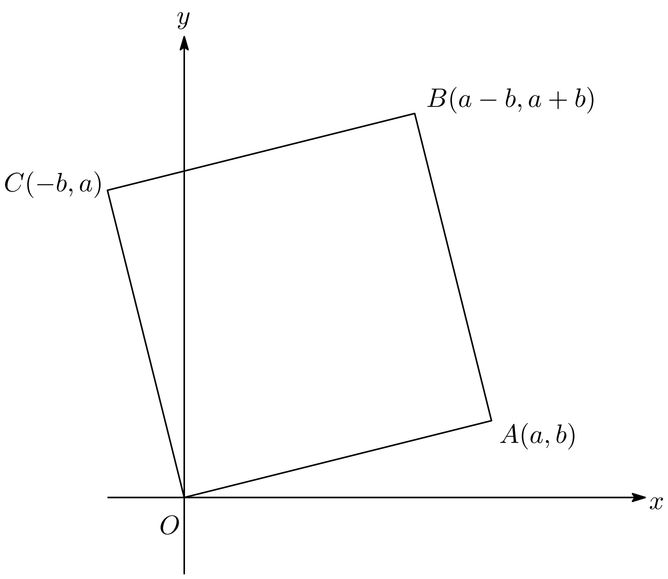

図 2

図 3 のように x_1, x_2 を決めると，点 A, B の y 座標も決まり，点 C, D の座標も x_1, x_2 の一次式で表される．それを直線 l, m の方程式に代入する．直線 l, m は一次方程式であるから，x_1, x_2 を代入した方程式もやはり一次方程式となる．つまり二元一次の連立方程式となる．一般に二元一次の連立方程式は解が無いか，一組あるかあるいは無限に解が存在するかのどれかである．すでに解は一つ求まっている．無限に存在しないこともほぼ自明である．よって，先に求めた内接正方形以外には内接する正方形は無い．C や D が直線 n 上にきた場合はどうするかということは，議論に値しない．

さて，内接する正方形が限られた 5 個の正方形しかないことがわかったが，実はこの正方形が正五角形に含まれる正方形のうちで最大のものではない．図 4 のような場合がある．つまり 4 点の内，3 点が正五角形の周上にあり他の 1 点が五角形の内側にある場合である．最初に定義した「内接」にはあてはまらないが，こちらの正方形の方が大きいのである．

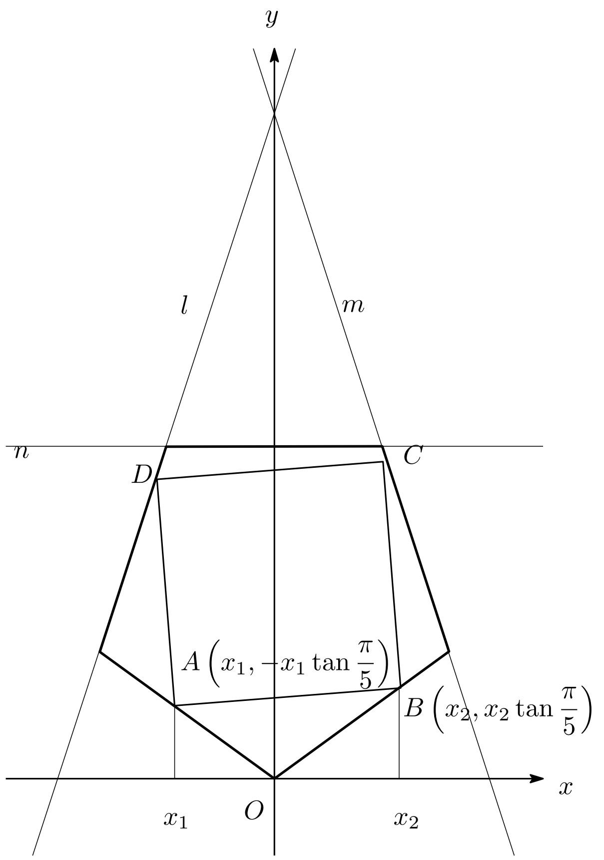

図 3

正弦定理より,

$$
\begin{aligned}
\frac{k}{\sin 108^\circ} &= \frac{1}{\sin 63^\circ} \\
\therefore k &= \frac{\sin 108^\circ}{\sin 63^\circ} \\
&= \frac{2\sqrt{\sqrt{5}(\sqrt{5}+1)}}{\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{5}(\sqrt{5}+1)}+\sqrt{5}-1} \\
&= 1.0673956817111818692592637626711
\end{aligned}
$$

となり，わずかにこちらの正方形が大きいのである．このように一つの頂点が正五角形の頂点と重なり，2 点が辺上にあり，残りの 1 点が内部にあるような正方形は各頂点に一つずつ，つまり 5 個あり，それ以外にはかけないことを言うのは難しくない．しかし，本当にこれ以外に面積が大きい「含まれる」正方形がないかどうかはもう少しきちっと証明しなければならない．

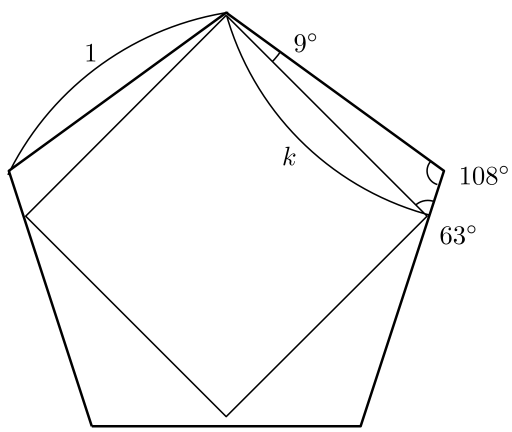

図 4