正方形に内接する正三角形

定理 1 正方形の辺上の任意の点 P を一つの頂点とし，なおかつその正方形に内接する正三角形は必ずかけ，その正三角形は P について唯一である．

[証明略]

必ず内接正三角形がかけることを示すことはそれほど困難ではない．唯一であるということも困難ではないが証明が繁雑なので省略する．

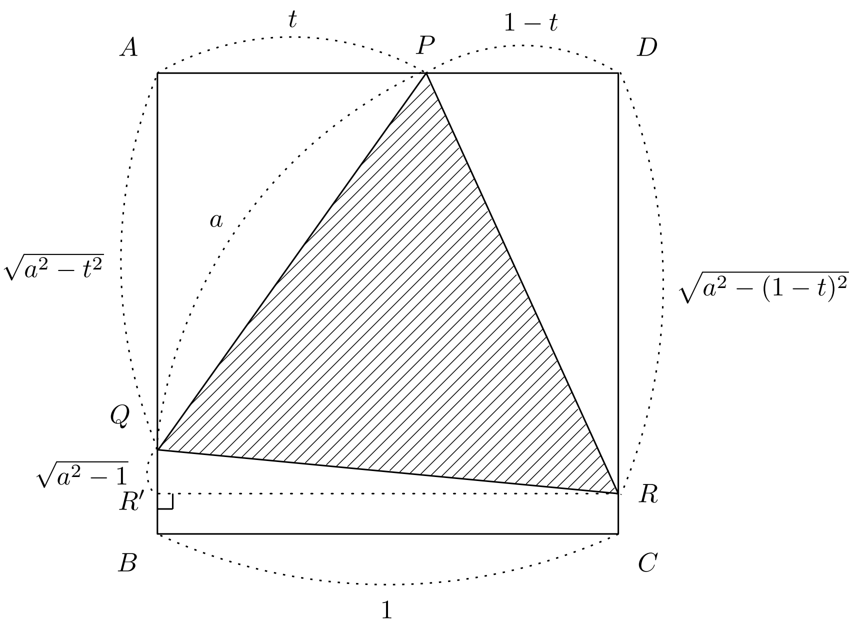


図 1

図 1 のように，1 辺の長さが 1 の正方形の中に 1 辺の長さが a の正三角形を内接させることを考える．$AP=t$ とする．ただし，

$$\frac{1}{2} \leqq t \leqq \sqrt{3}-1$$

という範囲が図 1 の状態となる．それ以外の場合も図 1 の場合を適当に回転または対象移動することにより実現できる（厳密な証明は省略）．さて

$$DR = AQ + QR'$$

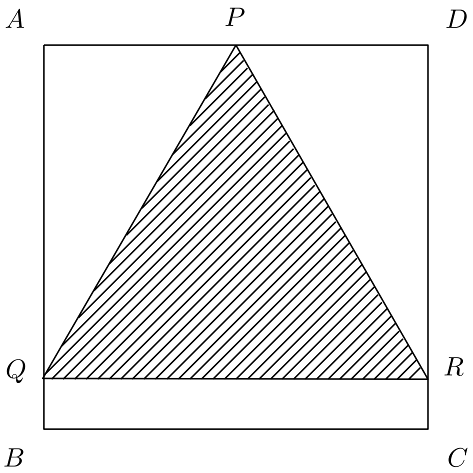
であることから，

$$\sqrt{a^2-(1-t)^2} = \sqrt{a^2-t^2} + \sqrt{a^2-1}$$

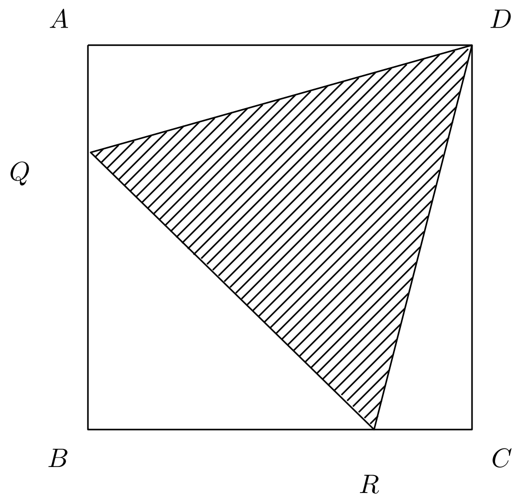
両辺を 2 乗するなどして，整理すると，

$$a^2 = \frac{4}{3}(t^2-t+1) \qquad \left(\frac{1}{2} \leqq t \leqq \sqrt{3}-1\right)$$

a^2 の最小値は $1\left(t=\dfrac{1}{2}\right)$, 最大値は $4\left(2-\sqrt{3}\right)\left(t=\sqrt{3}-1\right)$ である．このことはとりもなおさず，内接正三角形の面積の最小値が $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ で，最大値が $2\sqrt{3}-3$ であることを表している．最小になる場合は内接正三角形の頂点の一つが正方形の一辺の中点にあるときであり，最大になるときは正三角形の頂点の一つが正方形の頂点と重なるときである（図 2）．この最大になる状態を求める問題が 1987 年のハンガリーの数学オリンピックに出題されている．



面積が最小となる場合



面積が最大となる場合

図 2

内接三角形の作図法

正方形の辺上に点を与えれらて，コンパスと定規で内接三角形を作図せよと言われてもちょと考えてしまうのではないだろうか．おそらく色々な方法があると思われるが一例を示す．

(1) まず点 P が辺 AD 上に与えられたとする．その AB を延長した直線上に図 2 のように

$$FA=AP, PD=DF$$

となるように点 E, F をとる．

(2) $\angle REA=30^\circ$ となるように辺 CD 上に点 R をとる．終わったら (5) に飛ぶ．このとき R がかけない場合，つまり R をとろうとするとはみ出してしまう場合は (3) の R を P に読み替えておなじことをやればよい．

(3) 点 R が最初に与えられた場合は，$\angle ERD=60^\circ$ となるように直線 AB 上の A の外に点 E をとり，次に EA=AP となるように点 P をとる．（1）から続ける．

(4) 点 Q が与えられたときも同様である．

(5) $\angle QFB=30^\circ$ となるように辺 AB 上に点 Q をとる．Q がかけない場合は (4) の Q を P に読み替えて同様のことを行う．

(6) $\triangle PQR$ が求める正三角形である．

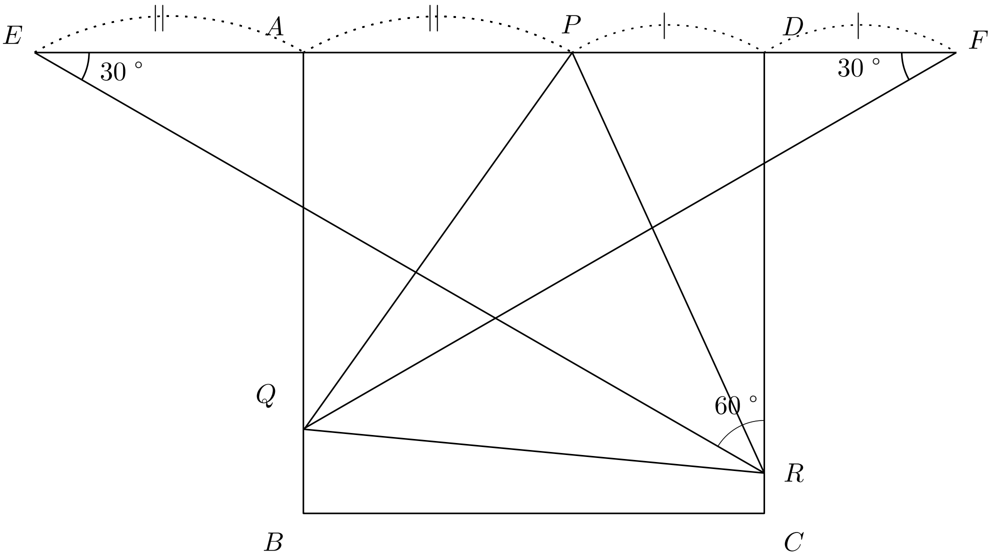


図 3

初等幾何による証明

この作図で確かに正三角形がかけることは，三平方の定理を使うまでもなく初等的に証明できる．

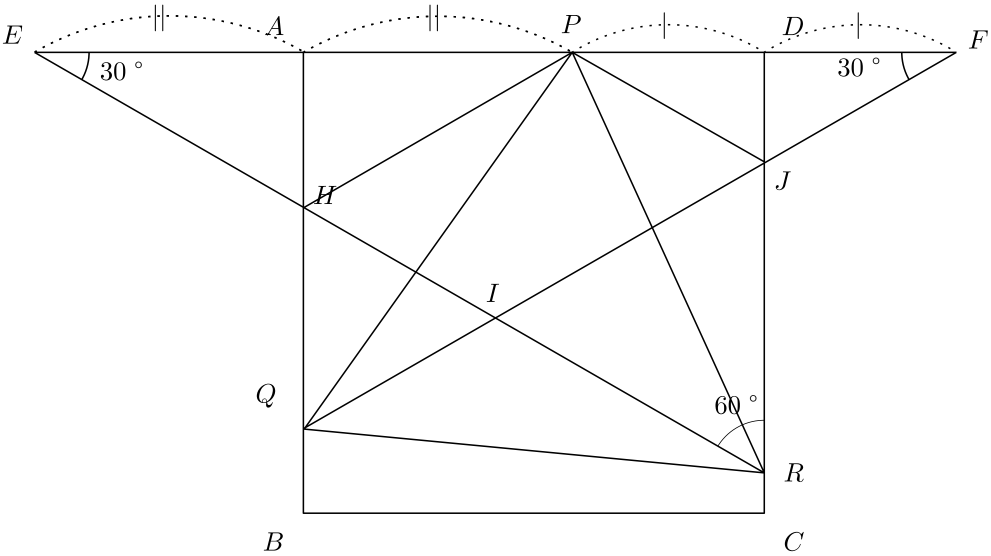


図 4

以下概略を示す．図 4 において，$\triangle HQI$ と $\triangle IJR$ は正三角形である．また，四角形 $HIJP$ は平行四辺形．よって，

$$\triangle PHQ \equiv \triangle RIQ \equiv \triangle RJP$$

よって，

$$PQ = QR = RP$$