変分法
Calculus of Variations

序 論

関数の関数を**汎関数**(*functional*) と呼ぶ．同じような言い方で合成関数があるが，全く別の意味である．汎関数の入力は関数そのものであり，出力は通常，値(あたい)である．その入力するべき関数を変関数とよぶ．通常の関数 (*ordinary function*) に入力するのが変数であるのと言葉の上では良く似ている．汎関数の例としては，2 点を結ぶ曲線の長さ，

$$l(y(x)) = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2}dx$$

あるいは，曲面の面積，

$$S(z(x, y)) = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy$$

などが挙げられる．ここで，D はその曲面の xy 平面への投影である．また通常の関数における微分法に相当するものとして，汎関数では変分法がある．

通常の関数において，その極値を論ずるのは非常に重要であるが，汎関数においても極大，極小を論じることは同様に重要であり，**変分問題**(*variational problem*) と呼ばれる．変分問題の中には，**最速降下線問題**(*brachistochrone problem*)，**測地問題**(*problem of geodesics*)，**等周問題**(*isoperimetric problems*) などが有名である．

変分法は 1696 年以後発展を続けてきた．その中で上述の 3 つの問題が大きく関わった．数学者ではオイラーのほか，ヨハン・ベルヌーイ（Johann Bernoulli)，ヤコブ・ベルヌーイ（Jacob Bernoulli)，ニュートン (Newton)，ド・ロピタル（de l'Hospital)，ラグランジェ（J.Lagrange) の名前が挙げられる．

I 最速降下線問題

1696 年ヨハン・ベルヌーイが提示．ヨハン自身，ヤコブ・ベルヌーイ，ニュートン，ド・ロピタルにより解かれる．

拘束条件のない変分問題を総称して，最速降下線問題と呼ぶことが多い．

II 測地線問題

$\varphi(x, y, z) = 0$ という拘束条件の下で汎関数，

$$l(y(x), z(x)) = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}dx$$

の極小値を求める問題を測地線問題と呼ぶ．つまり曲面上の最短経路を求める場合がこれに相当する．1697 年ヨハン・ベルヌーイによって解かれるが，一般的な方法はオイラーとラグランジェによって与えられる．

$\varphi(x, y, z) = 0$ の形の拘束条件付きの変分問題を総称して測地線問題と呼ぶことが多い．

III 等周問題

一定の長さの閉曲線が囲む面積が最大になる条件を求める問題をこう呼ぶ．この図形が円であることはギリシャ時代から知られていたが，証明を与えたのは変分法以後である．

一般に積分型の拘束条件の下での変分問題を等周問題と呼ぶことが多い．

Leonhard Euler 1707〜1783

スイスの数学者，物理学者．スイスのバーゼルに生まれ，ペテルスブルグで没．オイラーの父は数学の教育を受けた人物であったが，オイラーには自分の後を継いで牧師になることを望んでいた．オイラーの才能はヨハン・ベルヌーイによって見出された．23 歳よりメテルスブルグ学士院で物理を講じる．26 歳で同数学教授．34 歳でベルリン学士院数学部長．フィノー (Finow) 運河の改築の立案．ポツダム宮廷苑のかんがい施設の設計．暦の監修などを行う．
天文表の計算を自己の新方法により三日で行い，その後病を得て失明した (1766) が，没するまで研究，著述を続けた．朴訥な人柄で，子供は 13 人．赤ん坊を抱え，子供を足元で遊ばせながら数学をしたと言われている．天王星の軌道計算の途中，孫を呼びにやり，お茶をすすりながら話をしているとき，突然「死ぬよ」と周りに告げ，穏やかに「生きることと，計算することを止めた」という．
数学，物理学のほか，医学，植物学，化学，神学，東洋諸国語に及ぶ知識をもっていた．論文 700，著書 45．当時の数学の各分野で彼の寄与を見ないものはないといわれる．とりわけ，解析学（無限小解析）においては膨大な業績があり，微分積分の創始以来もっともこの分野の技法的な完成に寄与した．級数や連分数，母関数の方法，補間法や近似計算，特殊関数や微分方程式，多重積分や偏微分法などなど，古典的な解析学のあらゆる部分に，基本的なものから応用にいたるまでの業績がある．変分学の創始にラグランジェとともに，力を尽くした．少なからざる数学記号が彼の創始による．その名前は，指数関数と三角関数の間の関係を与えるオイラーの等式，オイラー＝マクローリンの和公式，オイラーの微分方程式，オイラーの定数などに残っている．
フェルマー以降進展がなかった整数論において，ラグランジュの出現まではほとんど一人で研究し続け，二次形式や原始根，フェルマーの小定理の拡張など，部分的ではあるが広大な結果を残した．オイラー関数に現在も彼の名前が残っている． またゼータ関数を初めて扱って（ゼータ関数の名称自体はリーマンによるもの），後に解析的整数論の重要な主題となるいくつかの非常に重大な結果を得ている．彼はゼータ関数と素数の関係を表すオイラー積の公式を発見（1737 年），素数の逆数の和が発散するという新しい結果を得た．更に彼は超人的な数学的直感を利用して，ゼータ関数の負の数における値に意味付けを与えた（後にこれは数学的に正当化されることとなる）．数の分割の理論においては，母関数の方法の応用が著しく，五角数定理をはじめ様々な組み合わせ的，あるいは楕円関数論的な恒等式を得た．
幾何学においては，位相幾何学の嚆矢となったオイラーの多面体定理（ただしオイラーは証明を与えていない）や「ケーニヒスベルクの橋の問題」が特に有名である．特性類の一つであるオイラー類は本質的にこのオイラーの多面体定理によって特徴付けられるものである．一筆書きのできるグラフはオイラーグラフと呼ばれる．
物理学の分野では，弾性運動，潮汐，三体問題，特に月の運動，摂動論等の数理方面を開拓．光の波動説を発展させて，エーテル仮説を提出．色消しレンズの発明，水力学の研究，タービン理論の定立など，その業績は極めて広範である．
1980 年〜2000 年にかけて流通していたスイスの第 6 次紙幣の 10 フラン紙幣にその肖像を見ることができる．

参考文献

[1] L.E.Elsgolc 瀬川富士訳『科学者・技術者のための変分法－理工学海外名著シリーズ 11 － 』（ブレイン図書出版，1972 年）

[2] 「ウィキペディア」<http://ja.wikipedia.org/wiki/>

[3] 蟹江幸博「人名索引」<http://www.com.mie-u.ac.jp/~kanie/tosm/humanind/jinmei.htm>