

変分とその性質

変関数 $y(x)$ に依存する汎関数を,

$$v = v(y(x)) \text{ または } v = v[y(x)]$$

と表す. 後者は通常関数と区別できるという利点がある.

関数の連続の定義

関数 $f(x)$ において, x の小さい変化が, 常に, $f(x)$ に小さい変化を生じさせるとき, $f(x)$ は連続関数であるという.

さらに正確に記述すると, 関数 $f(x)$ がその定義域内の $x = x_0$ において連続であることは次のように書ける.

任意の正数 ε に対して,

$$|x - x_0| < \delta \rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

であるような正数 δ が存在する. ($\lim$ で表すと, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$)

汎関数の連続の定義

汎関数 $v(y(x))$ において, $y(x)$ の小さい変化が, 常に $v(y(x))$ に小さい変化を生じさせるとき, $v(y(x))$ は連続汎関数という.

正確に記述すると, 汎関数 $v(y(x))$ が k 次の近さ (*closeness of order k*) の意味で $y = y_0(x)$ において連続であることは次のように書ける. (関数 $y = y_0(x)$ は汎関数 $v(y(x))$ を定義することができる関数とする)

任意の正数 ε に対して,

$$\begin{aligned} &|y(x) - y_0(x)| < \delta, \\ &|y'(x) - y_0'(x)| < \delta, \\ &\dots\dots\dots, \\ &|y^{(k)}(x) - y_0^{(k)}(x)| < \delta \rightarrow |v(y(x)) - v(y_0(x))| < \varepsilon \end{aligned}$$

であるような正数 δ が存在する.

微分の定義

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ と $f'(x)$ との差を, ε を用いて表せば,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon, \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varepsilon = 0$$

この式は,

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \varepsilon\Delta x, \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varepsilon = 0$$

と書くことができる. $\varepsilon\Delta x$ はゼロに収束するが, Δx 比べれば収束の速度は速い. 例えば, $f(x) = x^2$ では $\varepsilon = \Delta x$ であるから, $\varepsilon\Delta x = (\Delta x)^2$ で, 当然収束は速い. $f(x) = x^3$ では $\varepsilon = \Delta x(3x + \Delta x)$ である.

ここで t よりも高位の無限小を記号で,

$$o(t)$$

と表す. o はランダウの記号と呼ばれ, スモール・オーと読む. これは関数を表すのではなく性質を表す. つまり, 「 t よりも速く 0 に収束する」という意味である.

$$\eta = o(t)$$

のときは,

$$\frac{\eta}{t} \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow 0)$$

である. (η はギリシャ文字でイータと読む.) 例えば, $x^3 = o(x)$ であるが, $x^3 - x \neq o(x)$ である. つまり, 整式では $\eta(x) = o(x)$ となるためには, $\eta(x)$ の各項の最低次数は 2 である. この記法によれば, $\varepsilon \Delta x = o(\Delta x)$ である. つまり,

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + o(\Delta x)$$

と書き表すことができる. 逆に, Δx と無関係な A を用いて,

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$$

が成り立てば,

$$A = f'(x)$$

である.

高位の無限小 $o(\Delta x)$ を無視した, Δx に関して一次の項 (Δx に関して線形の部分), $f'(x)\Delta x$ を y の微分と呼び, df または, dy というように書く. つまり,

$$dy = f'(x)\Delta x$$

である. Δx を dx と書き直すと,

$$dy = f'(x)dx$$

あるいは,

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

とかけるので, 導関数の記号 $\frac{dy}{dx}$ が割り算としても合理的な意味を持っていることがわかる. よって微分係数を微分商と呼ぶこともある.

参考文献

[1] L.E.Elsgolc 瀬川富士訳 『科学者・技術者のための変分法 - 理工学海外名著シリーズ 11 - 』

(ブレイン図書出版, 1972 年)

[2] 熊原啓作 『初等微分積分学』(放送大学教材 2002)