変分の定義

線形汎関数とは

線形関数は,

$$\begin{cases} l(cx) = cl(x) \\ l(x_1 + x_2) = l(x_1) + l(x_2) \end{cases}$$

（c は任意定数）

独立変数が 1 つの線形関数は,

$$l(x) = kx$$

である．

同様に線形汎関数 (*linear function*) は次の 2 つの条件を満たす汎関数である．

$$\begin{cases} L(Cy(x)) = CL(y(x)) \\ L(y_1(x) + y_2(x)) = L(y(x_1)) + L(y(x_2)) \end{cases}$$

（C は任意定数）

線形汎関数の例

$$v(y(x)) = \int_{x_0}^{x_1} (p(x)y + q(x)y')dx$$

非線形汎関数の例

$$v(y(x)) = \int_{x_0}^{x_1} (p(x)y^2 + q(x)y')dx$$

線形関数が $y = kx$ であったのに対して，線形汎関数は色々な種類が考えられる．イメージしやすいのは, $v(y(x)) = \int_{x_0}^{x_1} ydx$ であろう．$v(y(x)) = \int_{x_0}^{x_1} y'dx$ ももちろん線形であるが，$v(y(x)) = [y]_{x_0}^{x_1}$ となり，両端しか使わないので，かえってイメージしにくいと思われる．この例からもわかるように，別に積分しなくても線形汎関数を作ることはできる．

変分の理論的定義

通常の関数における増分 Δx や dx に相当するものとして，変関数 $y(x)$ の増分または変分 (*variation*) を δy，それに対する汎関数の変分は δv で表す．ここで注意しなければいけないのは，δy は関数であって，δv は値であると言うことである．つまり，$\dfrac{\delta v}{\delta y}$ というものも考えられるが，微分法の $\dfrac{dy}{dx}$ が意味を持っていたのと違って，それほど意味のあるものではない．

汎関数 $v(y(x))$ の δy に対する増分,

$$\Delta v = v(y(x) + \delta y) - v(y(x))$$

が,

$$\Delta v = L(y(x), \delta y) + \beta(y(x), \delta y) \max |\delta y|$$

の形で表され,

$$\max |\delta y| \to 0 \text{ のとき } \beta(y(x), \delta y) \to 0$$

であれば，$\boxed{\delta y\text{ に関して線形である主要な部分 }L(y(x),\delta y)}$ を汎関数 $v(y(x))$ の δy に対する変分と呼び，δv で表す．つまり，

$$\delta v = L(y(x), \delta y)$$

この変分の理論的定義に基づき，以後実用的定義を導く．

変分の実用的定義

イメージを沸かせるために，関数における微分の性質を先ず示す．

$\frac{d}{dx}f(x) = f'(x)$ とすると，

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}f(x+\alpha dx) = f'(x+\alpha dx)dx$$

これは，合成関数の微分公式を用いているが，用いなくてもできる．つまり，

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \alpha}f(x+\alpha dx) &= \lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(x+(\alpha+\Delta\alpha)dx) - f(x+\alpha dx)}{\Delta\alpha} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0}\frac{f((x+\alpha dx)+\Delta\alpha dx) - f(x+\alpha dx)}{\Delta\alpha dx} \times dx \\
&= f'(x+\alpha dx)dx
\end{aligned}$$

である．この式に，$\alpha = 0$ を代入すると，

$$\left[\frac{\partial}{\partial \alpha}f(x+\alpha dx)\right]_{\alpha=0} = f'(x)dx = df(x)$$

変分においても，これと似たような手法を用いる．なぜこのような回りくどい方法をとるかというと，汎関数では変分そのものも関数であり，関数の増分のようになかなか自由に扱えないからである．だから変関数の変分の前に α をつけて対処するのである．

続いて，汎関数で同様のことを試みよう．$v(y(x)+\alpha\delta y)$ の α についての偏導関数に $\alpha = 0$ を代入したものを求めてみよう．

$$\begin{aligned}
\left[\frac{\partial}{\partial \alpha}v(y(x)+\alpha\delta y)\right]_{\alpha=0} &= \left[\lim_{\Delta\alpha \to 0}\frac{v(y(x)+(\alpha+\Delta\alpha)\delta y) - v(y(x)+\alpha\delta y)}{\Delta\alpha}\right]_{\alpha=0} \\
&= \lim_{\Delta\alpha \to 0}\frac{v(y(x)+\Delta\alpha\delta y) - v(y(x))}{\Delta\alpha} \\
&= \lim_{\alpha \to 0}\frac{v(y(x)+\alpha\delta y) - v(y(x))}{\alpha} \\
&= \lim_{\alpha \to 0}\frac{L(y(x),\alpha\delta y) + \beta(y(x),\alpha\delta y)\max|\alpha\delta y|}{\alpha} \\
&= \lim_{\alpha \to 0}\frac{\alpha L(y(x),\delta y) + \beta(y(x),\alpha\delta y)\,|\alpha|\max|\delta y|}{\alpha}
\end{aligned}$$

ここで，δy について，$L(y(x),\delta y)$ が線形であるという性質を使っている．

$$\left[\frac{\partial}{\partial \alpha}v(y(x)+\alpha\delta y)\right]_{\alpha=0} = L(y(x),\delta y) + \lim_{\alpha \to 0}\{\pm\beta(y(x),\alpha\delta y)\max|\delta y|\}$$

$$\alpha \to 0 \text{ のとき，} \beta(y(x), \alpha\delta y) \to 0$$

$$\therefore \left[\frac{\partial}{\partial\alpha} v(y(x) + \alpha\delta y)\right]_{\alpha=0} = L(y(x), \delta y)z = \delta v$$

変分の実用的定義

汎関数 $v(y(x))$ の変分を δv とすると，

$$\delta v = \left[\frac{\partial}{\partial\alpha} v(y(x) + \alpha\delta y)\right]_{\alpha=0}$$

（中略）

$y = y_0(x)$ が $v(y(x))$ に極値をとらせるときは

$\delta v = 0$ である．

このことも通常の関数における極値の条件から直感的に理解することは困難ではない．

参考文献

[1] L.E.Elsgolc 瀬川富士訳『科学者・技術者のための変分法－理工学海外名著シリーズ 11 － 』（ブレイン図書出版，1972 年）