オイラーの方程式

最も簡単な汎関数,

$$v(y(x)) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx$$

の極値について調べる．変関数 $y(x)$ の変分 δy に対する汎関数の変分を δv とすると，変分の実用的定義より,

$$dv = \left[\frac{\partial}{\partial \alpha}\int_{x_0}^{x_1} F(x, y+\alpha\delta y, (y+\alpha\delta y)')dx\right]_{\alpha=0}$$

微分と積分の順序は交換できるので,

$$dv = \left[\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial}{\partial \alpha}F(x, y+\alpha\delta y, (y+\alpha\delta y)')dx\right]_{\alpha=0} = \left[\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial}{\partial \alpha}F(x, y+\alpha\delta y, y'+\alpha\delta y')dx\right]_{\alpha=0}$$

α は積分変数 x と無関係なので,

$$\left[\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial}{\partial \alpha}F(x, y+\alpha\delta y, y'+\alpha\delta y')dx\right]_{\alpha=0} = \int_{x_0}^{x_1}\left[\frac{\partial}{\partial \alpha}F(x, y+\alpha\delta y, y'+\alpha\delta y')\right]_{\alpha=0} dx$$

文字がやたらとたくさん出てきた．混乱するといけないので，一般的な場合について整理してみよう．関数 f は x, y, z の関数で，さらに，y と z は α, β, γ の関数とする．つまり，f は合成関数である．偏導関数の性質より,

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \alpha} = \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \alpha}}$$

$Y = y + \alpha\delta y, Z = y' + \alpha\delta y'$ とすると,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \alpha}F(x, y+\alpha\delta y, y'+\alpha\delta y') &= \frac{\partial}{\partial \alpha}F(x, Y, Z)\\ &= \frac{\partial F}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial \alpha} + \frac{\partial F}{\partial Z}\frac{\partial Z}{\partial \alpha}\\ &= \frac{\partial F}{\partial Y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial Z}\delta y'\\ &= F_Y\delta y + F_Z\delta y'\end{aligned}$$

これに α=0 を代入してやると,

$$[F_Y\delta y + F_Z\delta y']_{\alpha=0} = F_y\delta y + F_{y'}\delta y'$$

つまり,

$$\boxed{\delta v = \int_{x_0}^{x_1}(F_y\delta y + F_{y'}\delta y')dx}$$

$v(y(x))$ が極値をとるとき,

$$\delta v = 0$$

$$\therefore \int_{x_0}^{x_1} F_y\delta y dx + \int_{x_0}^{x_1} F_{y'}\delta y' dx = 0$$

δy だけでも邪魔な感じがするのに，$\delta y'$ はもっと邪魔なので，第 2 項を部分積分して,

$$\int_{x_0}^{x_1} F_y \delta y dx + [F_{y'}\delta y]_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{d}{dx}F_{y'}\right)\delta y dx = 0$$
$$[F_{y'}\delta y]_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \left(F_y - \frac{d}{dx}F_{y'}\right)\delta y dx = 0$$

端点の条件より,

$$[F_{y'}\delta y]_{x_0}^{x_1} = 0$$
$$\therefore \int_{x_0}^{x_1} \left(F_y - \frac{d}{dx}F_{y'}\right)\delta y dx = 0 \tag{1}$$

これでずい分とすっきりした形になった．ゴールは近い．

δy は任意関数であるので，基本補題（省略）を用いて,

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} \equiv 0$$

このことは直感的に理解することも困難なことではない．

つまり，微分方程式,

$$\boxed{F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0}$$

を満たすことと，(1) は同値である．

$F_y - \dfrac{d}{dx}F_{y'} = 0$ の第 2 項の微分を実行すると，$F_{y'}$ は，x, y, y' の関数なので,

$$F_y - \frac{\partial}{\partial x}F_{y'} - \frac{\partial}{\partial y}F_{y'}\frac{dy}{dx} - \frac{\partial}{\partial y'}F_{y'}\frac{dy'}{dx} = 0$$
$$F_y - \frac{\partial}{\partial x}F_{y'} - \frac{\partial}{\partial y}F_{y'}y' - \frac{\partial}{\partial y'}F_{y'}y'' = 0$$

簡単に書くと,

$$\boxed{F_y - F_{xy'} - F_{yy'}y' - F_{y'y'}y'' = 0}$$

この方程式は，1744 年に導いたオイラーにちなんで，オイラーの方程式（*Euler equation*）と呼ばれる．オイラーの方程式の積分曲線 $y = y(x, C_1, C_2)$ は，極値曲線（*extremal*）あるいは停留曲線（*stationary curve*）と呼ばれる．オイラーの方程式は二階微分方程式である．また一般に非線形方程式である．ただし，この方程式は実際に極値をとるための必要条件に過ぎないことはいうまでもない．

例題 1. 次の汎関数の極値曲線を求めよ．

$$v(y(x)) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ((y')^2 - y^2)dx, y(0) = 0, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

解 $F = (y')^2 - y^2$ であるから,

$$F_y = -2y, F_{y'} = 2y'$$

$$F_{yy'} = 0, F_{y'y'} = 2$$

よって，オイラーの方程式は,

$$\begin{aligned}
-2y - 2y'' &= 0 \\
y + y'' &= 0 \\
\frac{d^2y}{dx^2} &= -y \\
\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2} &= -y\frac{dy}{dx} \\
\int \frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}dx &= -\int y\frac{dy}{dx}dx \\
\int y'\frac{dy'}{dx}dx &= -\int ydy \\
\int y'dy' &= -\int ydy \\
\frac{1}{2}\left(y'\right)^2 &= -\frac{1}{2}y^2 + C \\
\left(y'\right)^2 &= -y^2 + C'^2 \\
y' &= \pm\sqrt{C'^2 - y} \\
\frac{1}{\sqrt{C'^2 - y}}\frac{dy}{dx} &= \pm 1 \\
\int \frac{1}{\sqrt{C'^2 - y}}dy &= \pm\int dx
\end{aligned}$$

$y = C' \sin\theta$ と置換することにより解けて,

$$y = C' \sin(\pm x + C'')$$

これは書き換えると,

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$$

と表せる．初期条件から,

$$y = \sin x \ldots \text{（答え）}$$

例題 2. 次の汎関数の極値曲線を求めよ.

$$v(y(x)) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ((y')^2 + 12xy)dx, y(0) = 0, y(1) = 1$$

解 $F = (y')^2 + 12xy$ より,

$$F_y = 12x, F_{y'} = 2y', F_{xy'} = 0, F_{yy'} = 0, F_{y'y'} = 2$$

オイラーの方程式は,

$$\begin{aligned}
12x - 2y'' &= 0 \\
y'' &= 6x
\end{aligned}$$

2 回積分して，

$$y = x^3 + C_1 x + C_2$$

初期条件より，

$$y = x^3 \ldots \text{（答え）}$$

参考文献

[1] L.E.Elsgolc 瀬川富士訳『科学者・技術者のための変分法－理工学海外名著シリーズ 11 － 』（ブレイン図書出版，1972 年）