

0.1 関数 F が y' を含まない場合

オイラーの方程式に関する例題

0.1 関数 F が y' を含まない場合

オイラーの方程式は、 $F_y = 0$ であるが、この方程式の解は任意定数を含まないので、境界条件を満たす特別な場合を除いて、解を持たない。

例題 3. 汎関数、

$$v(y(x)) = \int_{x_0}^{x_1} y^2 dx, y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1$$

は、 $y_0 = y_1 = 0$ の場合は、極値曲線、 $y_1 = 0$ をもつが、それ以外では解は無い。

0.2 関数 F が y' について一次の場合

$$F = M(x, y) + N(x, y)y'$$

とおける。つまり汎関数は、

$$v(y(x)) = \int_{x_0}^{x_1} \left(M(x, y) + N(x, y) \frac{dy}{dx} \right) dx$$

とかける。

$$F_y = \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial y} y', F_{y'} = N, \frac{d}{dx} F_{y'} = \frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \frac{dy}{dx}$$

より、オイラーの方程式 $F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$ は、

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial y} y' - \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial y} y' &= 0 \\ \therefore \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} &= 0 \end{aligned}$$

これは、 $f(x, y) = 0$ の形をした一つの曲線を表す方程式であり、微分方程式ではない。境界条件を満たす場合以外は、極値曲線は存在しない。後述の例題 4 がこれに相当する。

また、 $\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \equiv 0$ の場合は、後述の定理により、 $Mdx + Ndy$ は全微分となる。

$df(x, y) = Mdx + Ndy$ 、端点を $A(x_0, y_0), B(x_1, y_1)$ とすると、

$$v = \int_{x_0}^{x_1} \left(M + N \frac{dy}{dx} \right) dx = \int_A^B (Mdx + Ndy) = \int_A^B df = f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0) = \text{constant}$$

よって、どんな曲線でも汎関数は一定の値にしかならず、極値曲線を求めることは無意味である。後述の例題 5 がこれに相当する。

定理 $M(x, y), N(x, y)$ が C^1 級の関数のとき、 $Mdx + Ndy$ が C^2 級の関数の全微分式であるための必要十分条件は、

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

0.3 関数 F が y' だけを含む場合

である。(証明略)

例題 4. 汎関数,

$$v(y(x)) = \int_{x_0}^{x_1} (y^2 + x^2 y') dx, y(0) = 0, y(1) = a$$

の極値曲線を求めよ.

解 $M = y^2, N = x^2$ とすると, オイラーの方程式は,

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 0$$

$$\therefore y - x = 0$$

$a = 1$ のとき, $y - x = 0$ は極値曲線であるが, それ以外では, 極値曲線は存在しない.

例題 5. 汎関数,

$$v(y(x)) = \int_{x_0}^{x_1} (y + xy') dx, y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1$$

の極値曲線を求めよ.

解 $M = y, N = x$ とすると, $\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 0$ は恒等的に成り立つ,

$df(x, y) = Mdx + Ndy$ とすると, $f = xy$ であるから,

$$v = f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0) = x_1 y_1 - x_0 y_0 = \text{constant}$$

よって, 極値曲線を求めることは無意味である.

0.3 関数 F が y' だけを含む場合

オイラーの方程式は $F_{y'y'} y'' = 0$ である. よって, $y'' = 0$ あるいは $F_{y'y'} = 0$ である. 前者は直線群, 後者も y' の実数解があれば直線群になるので, この場合の極値曲線は, 任意の直線,

$$y = C_1 x + C_2$$

である.

例題 6. 曲線の長さを表す汎関数,

$$l(y(x)) = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2} dx$$

の極値曲線は, 全ての直線 $y = C_1 x + C_2$ である.

例題 7. 曲線 $y = y(x)$ 上を動く点があり, その速度が y' のみで表されるならば, その所要時間の汎関数は,

$$t(y(x)) = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{v(y')} dx$$

で表され, その極値曲線は, 直線群である.

0.4 関数 F が x と y' だけを含む場合

0.4 関数 F が x と y' だけを含む場合

$F_y = 0$ であるから，オイラーの方程式は，

$$\frac{d}{dx} F_{y'} = 0$$

つまり，

$$F_{y'} = C_1$$

この一階の微分方程式は y を含まないので， y' について解くか，適当なパラメータを導入して解くことができる．

例題 8. 汎関数，

$$t(y(x)) = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{x} dx$$

の極値曲線について調べよ．この汎関数は曲線上を動く粒子の所要時間を表す．ただし，速度は x である．つまり，右に行くほど密度の薄い媒質があって，その中の 2 点を光が屈折しながらどう進むか，ということを極値曲線が表している．結果は興味深い．

解

$$\begin{aligned} F &= \frac{\sqrt{1+y'^2}}{x} \\ F_{y'} &= \frac{1}{2x\sqrt{1+y'^2}} \\ \therefore x\sqrt{1+y'^2} &= C \\ y'^2 &= \frac{C}{x^2} - 1 \\ y' &= \sqrt{\frac{C}{x^2} - 1} \\ y &= \int \sqrt{\frac{C_1^2 - x^2}{x^2}} dx \end{aligned}$$

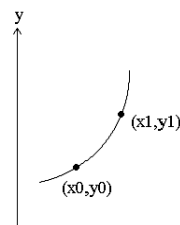
$x = C_1 \sin t$ とおくと，

$$y = \int \frac{\cos t}{\sin t} C_1 \sin t dt = C_1 \sin t + C_2$$

t を消去すると，

$$x^2 + (y - C_2)^2 = C_1^2$$

つまり， y 軸上に中心をもつ円弧である．



0.5 関数 F が y と y' だけを含む場合

$F_{xy'} = 0$ であるから，オイラーの方程式は，

$$F_y - F_{yy'} y' - F_{y'y'} y'' = 0$$

0.5 関数 F が y と y' だけを含む場合

ここで, 合成関数の微分公式より,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(F - F_{y'}y') &= F_y y' + F_{y'} y'' - (F_{yy'} y' + F_{y'y'} y'') y' - F_{y'} y'' \\ &= F_y y' - F_{yy'} y' - F_{y'y'} y'' y' \\ &= (F_y - F_{yy'} - F_{y'y'} y'') y' \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{F - F_{y'} y' = C_1}$$

ここで, $y' \neq 0$ という条件を用いていることには注意を払わなければならない.

例題 1 別解 $F = (y')^2 - y^2$ より,

$$F_{y'} = 2y'$$

$F - F_{y'} y' = C_1$ より,

$$\begin{aligned}(y')^2 - y^2 - 2(y')^2 &= C_1 \\ -(y')^2 - y^2 &= C_1\end{aligned}$$

(後略)

例題 9. 最小回転面 (minimum surface of revolution) の問題

$$S(y(x)) = 2\pi \int_{x_0}^{x_1} y \sqrt{1 + y'^2} dx$$

解 オイラーの方程式は次の形の第一積分を持つ.

$$\begin{aligned}F - F_{y'} y' &= C_1 \\ y \sqrt{1 + y'^2} - \frac{y y'^2}{\sqrt{1 + y'^2}} &= C_1 \\ y &= C_1 \sqrt{1 + y'^2} \\ y' &= \pm \sqrt{\frac{y^2}{C_1^2} - 1} \\ \frac{C_1}{\sqrt{y^2 - C_1^2}} y' &= \pm 1 \\ \int \frac{C_1}{\sqrt{y^2 - C_1^2}} dy &= \pm x\end{aligned}$$

$y = C_1 \cosh t$ とおくと, $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$, $dy = C_1 \sinh t dt$ より,

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sinh t} dy &= \pm x \\ C_1 \int dt &= \pm x \\ C_1 t &= \pm x + C \\ y &= C_1 \cosh \left(\frac{\pm x + C}{C_1} \right)\end{aligned}$$

0.5 関数 F が y と y' だけを含む場合

$\cosh(-\theta) = \cosh \theta$ であるから ,

$$y = C_1 \cosh \left(\frac{x + C_2}{C_1} \right)$$

これは懸垂線 (*catenary*) である . 懸垂線を回転して得られる曲面は (*catenoid*) と呼ばれる . 2 つの輪の間に石鹸幕の筒を作った場合がこれに相当する .

参考文献

- [1] 栗田稔 『基礎教養 微分積分学』(学術図書出版 , 1977 年)
- [2] L.E.Elsgolc 瀬川富士訳 『科学者・技術者のための変分法 - 理工学海外名著シリーズ 11 - 』
(ブレイン図書出版 , 1972 年)