最速降下線問題 (1)

例題 10．最速降下線問題

t 秒後の位置を (x, y)，出発点からの道のりを s とする．題意より出発点は $(0, 0)$，終点は (x_1, y_1) である．また，便宜上 y 座標は下向きを正とする．

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{2gy}$$

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

より ds を消去すると，

$$dt = \frac{\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}}{\sqrt{2gy}}$$

$$dt = \frac{\sqrt{1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}}{\sqrt{2gy}} dx$$

両辺を積分して，

$$t = \int \frac{\sqrt{1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}}{\sqrt{2gy}} dx$$

また，全行程の所要時間は，次の汎関数で表される．

$$v(y(x)) = \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{2gy}} dx = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{y}} dx, y(0) = y(2\pi) = 0$$

この値は重力加速度の平方根に反比例しているが，重力加速度が極値曲線に全く影響を与えていないこともわかる．この汎関数の極値曲線を求めるには，

$$F(y, y') = \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{y}}$$

として，オイラーの方程式を立て，解けばよいことになる．F は，x を含んでいないので，

$$F - y' F_{y'} = C$$

と書き表すことができる．つまり，

$$\frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{y}} - \frac{(y')^2}{\sqrt{y(1 + (y')^2)}} = C$$

を解けばよいことになる．

$$1 = C\sqrt{y(1 + (y')^2)}$$

両辺を 2 乗して，

$$y(1 + (y')^2) = C_1$$

とおける．

$$y' = \sqrt{\frac{C_1 - y}{y}}$$

$$\sqrt{\frac{y}{C_1-y}}\frac{dy}{dx}=1$$

両辺を積分して，

$$\int\sqrt{\frac{y}{C_1-y}}dy=x$$

$y=\dfrac{C_1}{2}-t$ とおくと，$dx=-dt$ であるから，

$$-\int\sqrt{\frac{\frac{C_1}{2}-t}{\frac{C_1}{2}+t}}dt=x$$

$\dfrac{C_1}{2}=C_2, t=C_2\cos\theta$ とおくと，$dt=-C_2\sin\theta d\theta$ であるから，

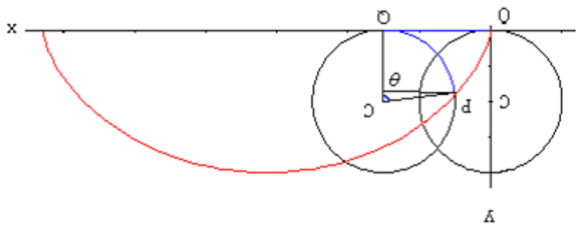
$$\begin{aligned}
x&=C_2\int\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}\sin\theta d\theta\\
&=C_2\int\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}\sin\theta d\theta\\
&=C_2\int\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}d\theta\\
&=C_2\int 2\sin^2\frac{\theta}{2}d\theta\\
&=C_2\int(1-\cos\theta)d\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{cases}x=C_2(\theta-\sin\theta)+C_3\\ y=C_2-C_2\cos\theta\end{cases}$$

となり，この極値曲線はサイクロイド（$cycloid$）である．初期条件より，

$$C_3=0$$

$$\therefore\begin{cases}x=C_2(\theta-\sin\theta)\\ y=C_2(1-\cos\theta)\end{cases}\quad\cdots\text{（答え）}$$



参考文献

[1] L.E.Elsgolc 瀬川富士訳『科学者・技術者のための変分法ー理工学海外名著シリーズ 11 ー』（ブレイン図書出版，1972 年）