最速降下線問題 (2)

最速降下線問題で，出発点を東京，終点を大阪とすると，$(x_1, y_1) = (400000, 0)$ となる．（単位は m）つまり，

$$2\pi C_2 = 400000$$
$$C_2 = \frac{200000}{\pi}$$

つまり最も深いところで，

$$2C_2 = \frac{400}{\pi} km \fallingdotseq 127 km$$

になる．この際，実際には丸い地球を便宜上東京・大阪間は殆ど水平であると考えている．また重力加速度も一定ではなく，深く地中に潜ればその分 g の値も減るのであるが，これも殆ど一定としての話である．

速度の最大値は，当然この最も深い所で，

$$\sqrt{2gy} = \sqrt{\frac{800000 \times 9.8}{\pi}} = 400\sqrt{\frac{49}{\pi}} = \frac{2800}{\sqrt{\pi}} \fallingdotseq \text{1580m/s=5688km/h}$$

所要時間は，

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{y}} dx \\
=&\frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{\sqrt{y}} \frac{dx}{d\theta} d\theta \\
=&\frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}}{\sqrt{y}} d\theta \\
=&\frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{2\pi} \frac{C_2\sqrt{(1-\cos\theta)^2 + \sin^2\theta}}{\sqrt{C_2(1-\cos\theta)}} d\theta \\
=&\frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{2\pi} \frac{C_2\sqrt{2(1-\cos\theta)}}{\sqrt{C_2(1-\cos\theta)}} d\theta \\
=&\frac{\sqrt{2C_2}}{\sqrt{2g}} \int_0^{2\pi} d\theta \\
=&\frac{2\pi\sqrt{C_2}}{\sqrt{g}} \dots \\
=&\frac{2\pi\sqrt{\frac{200000}{\pi}}}{\sqrt{9.8}} \\
=&\frac{2000\sqrt{\pi}}{7} \\
\fallingdotseq& \text{506sec=8min26sec}
\end{aligned}$$

ちなみに，

$$\boxed{T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{y}} dx}$$

は，原点を出発する場合，あらゆる曲線に対応している．原点を出発点としない場合は後述する．

最後に加速度について調べてみよう．

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2gy}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = \sqrt{\frac{2gC_2(1-\cos\theta)}{1+\left(\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\right)^2}} = \sqrt{\frac{\frac{2gC_2(1-\cos\theta)}{2}}{1-\cos\theta}} = \sqrt{gC_2}(1-\cos\theta)$$

$$\frac{dy}{dt} = \sqrt{\frac{2gy}{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}} = \sqrt{\frac{2gC_2(1-\cos\theta)}{1+\left(\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2}} = \sqrt{\frac{\frac{2gC_2(1-\cos\theta)}{2}}{1+\cos\theta}} = \sqrt{gC_2}\sin\theta$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \sqrt{gC_2}\sin\theta\frac{d\theta}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2} = \sqrt{gC_2}\cos\theta\frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\frac{d\theta}{dx}}{\frac{dt}{dx}} = \frac{\frac{1}{C_2(1-\cos\theta)}}{\frac{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{\sqrt{2gy}}} = \frac{\frac{1}{C_2(1-\cos\theta)}}{\frac{1}{\sqrt{gC_2}(1-\cos\theta)}} = \sqrt{\frac{g}{C_2}}$$

$$\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2} = \frac{d\theta}{dt}\sqrt{gC_2(\sin\theta^2+\cos^2\theta)} = \sqrt{\frac{g}{C_2}} \times \sqrt{gC_2} = g$$

つまり，加速度の絶対値は一定である．これは，常に下向きの重力との合力としての結果で，始点では下向きの重力のみ，最下点では上向きの g ということである．つまり最初は自由落下と同じく全く g はかからず，最下点では重力加速度と加えて $2g$ を感じることができる．（この部分，「変分法指導学習書」の記述誤り）ループタイプのジェットコースターが 5〜6g，スクリューが 4〜5g，そしてスペースシャトルの発射で $3g$ なので，かなり小さい値である．ちなみに 2000 年現在で慣性力の大きいジェットコースターは次の通りである．

1 「シャトルループ」 横浜ドリームランドなど 6G

2 「F2」 那須ハイランドパーク 4.96G

3 「ディアブロ」 姫路セントラルパーク 4.9G

ついでに遠心力を調べてみよう．曲率を $-k$ とすると，

$$k = \frac{\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dy}{dt} - \frac{d^2y}{dt^2}\frac{dx}{dt}}{\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}$$

この場合の媒介変数は何でも良いのだが，時間（秒）とする．遠心力を ma（m は質量）とすると，

$$\begin{aligned} a &= kv^2 \\ &= \frac{\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dy}{dt} - \frac{d^2y}{dt^2}\frac{dx}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{g\sin\theta\sqrt{gC_2}\sin\theta - g\cos\theta\sqrt{gC_2}(1-\cos\theta)}{\sqrt{\left(\sqrt{gC_2}(1-\cos\theta)\right)^2+\left(\sqrt{gC_2}\sin\theta\right)^2}} \\
&= \frac{g\sqrt{gC_2}(1-\cos\theta)}{\sqrt{gC_2}\sqrt{2(1-\cos\theta)}} \\
&= \frac{g\sqrt{(1-\cos\theta)}}{\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

となり前述の結果と矛盾しない.

順序が逆であるが，曲率を計算すると，

$$
k = \frac{\dfrac{d^2x}{dt^2}\dfrac{dy}{dt} - \dfrac{d^2y}{dt^2}\dfrac{dx}{dt}}{\left\{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}} = \frac{g\sqrt{gC_2}(1-\cos\theta)}{gC_2 2(1-\cos\theta)\sqrt{gC_2}\sqrt{2(1-\cos\theta)}} = \frac{1}{C_2 2\sqrt{2(1-\cos\theta)}}
$$

となり，これも各種性質と矛盾しない.

また，サイクロイドは出発点によらず，最低点に到達する時間が同じである．このことを調べる.

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_{x_0}^{\pi}\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{y-y_0}}dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_{\theta_0}^{\pi}\frac{\sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}}{\sqrt{y-y_0}}\frac{dx}{d\theta}d\theta \\
&= \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_{\theta_0}^{\pi}\frac{\sqrt{\left(\dfrac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{d\theta}\right)^2}}{\sqrt{y-y_0}}d\theta \\
&= \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_{\theta_0}^{\pi}\frac{C_2\sqrt{(1-\cos\theta)^2+\sin^2\theta}}{\sqrt{C_2\{(1-\cos\theta)-(1-\cos\theta_0)\}}}d\theta \\
&= \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_{\theta_0}^{\pi}\frac{C_2\sqrt{2(1-\cos\theta)}}{\sqrt{C_2(\cos\theta_0-\cos\theta)}}d\theta \\
&= \frac{\sqrt{C_2}}{\sqrt{g}}\int_{\theta_0}^{\pi}\frac{\sqrt{1-\cos\theta}}{\sqrt{\cos\theta_0-\cos\theta}}d\theta
\end{aligned}
$$

$\cos\theta_0-\cos\theta=u$ とおくと $\theta=\theta_0$ のとき $u=0,\theta=\pi$ のとき $u=\cos\theta_0+1$.

また，$du=\sin\theta d\theta = 2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}$ であるから，

$$
\int_{\theta_0}^{\pi}\frac{\sqrt{1-\cos\theta}}{\sqrt{\cos\theta_0-\cos\theta}}d\theta = \int_0^{\cos\theta_0+1}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{u}2\cos\dfrac{\theta}{2}}du
$$

$\cos\dfrac{\theta}{2}=\sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{2}}=\sqrt{\dfrac{1+\cos\theta_0-u}{2}}$ より，

$$
\int_0^{\cos\theta_0+1}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{u}2\sqrt{\dfrac{1+\cos\theta_0-u}{2}}}du = \int_0^{\cos\theta_0+1}\frac{1}{\sqrt{u}\sqrt{1+\cos\theta_0-u}}du
$$

$u=s+\dfrac{1+\cos\theta_0}{2}$ とすると，上端は $\dfrac{1+\cos\theta_0}{2}$，下端は $-\dfrac{1+\cos\theta_0}{2}$.

$$\int_0^{\cos\theta_0+1}\frac{1}{\sqrt{u}\sqrt{1+\cos\theta_0-u}}du=\int_{-\frac{1+\cos\theta_0}{2}}^{\frac{1+\cos\theta_0}{2}}\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1+\cos\theta_0}{2}\right)^2-s^2}}ds$$

$s=\dfrac{1+\cos\theta_0}{2}\sin r$ とおくと，上端は $\dfrac{\pi}{2}$，下端は $\dfrac{\pi}{2}$. また，$ds=\dfrac{1+\cos\theta_0}{2}\cos r dr$ であるから，

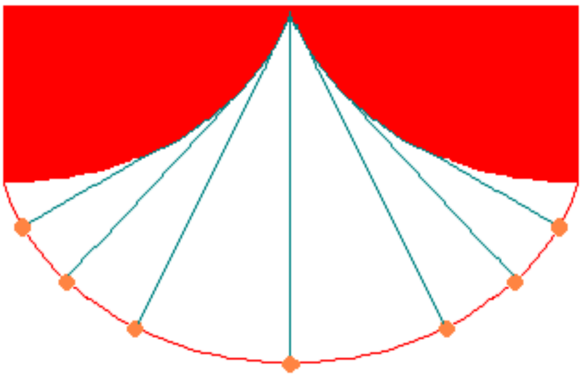
$$\int_{-\frac{1+\cos\theta_0}{2}}^{\frac{1+\cos\theta_0}{2}}\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1+\cos\theta_0}{2}\right)^2-s^2}}ds=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\frac{1+\cos\theta_0}{2}\cos r}\frac{1+\cos\theta_0}{2}\cos r dr=[r]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\pi$$

$$\therefore T=\frac{\sqrt{C_2}}{\sqrt{g}}\pi$$

となり，これは，(1) 式の $\dfrac{1}{2}$ つまり，サイクロイドの始点から最低点までの所要時間に等しい．この性質を使って，サイクロイド振り子というものがある．普通の円弧の振り子では，θ が小さいとき，

$$\sin\theta\fallingdotseq\theta$$

という性質を使っているため，実は振幅によって周期は変わってしまう．



$$\begin{cases} x=R\cos\theta \\ y=R\sin\theta \end{cases}$$

とし，右端から左端までの行程にかかる時間を調べると，

$$\begin{aligned}
T&=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_R^{-R}\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{y}}dx\\
&=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^{\pi}\frac{\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}}{\sqrt{y}}d\theta\\
&=\frac{\sqrt{R}}{\sqrt{2g}}\int_0^{\pi}\frac{1}{\sqrt{\sin\theta}}d\theta\\
&=\frac{\sqrt{2R}}{\sqrt{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{\sin\theta}}d\theta
\end{aligned}$$

となり，楕円積分なので解けない．これは振幅の小さい時の所要時間，$\dfrac{\pi\sqrt{R}}{\sqrt{g}}$ より大きくなる．

参考文献

[1] L.E.Elsgolc 瀬川富士訳『科学者・技術者のための変分法－理工学海外名著シリーズ 11 － 』（ブレイン図書出版，1972 年）．

[2] おおはた大介「遊園地ドットコム！」<http://www.yuuenchi.com/>