等周問題

問　長さ π の紐があり，一端が原点に，もう一端が x 軸上にある．この紐と x 軸が囲む面積の極大を調べよ．

解　汎関数

$$v(y(x))=\int_0^{x_1} ydx, t=\int_0^{x}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx, x=x_1 \text{のとき } t=\pi, y=0$$

を考える．

$$\frac{dt}{dx}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

$$\therefore \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=1$$

$$\frac{dx}{dt}=\sqrt{1-\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

$$\begin{aligned} v&=\int_0^{\pi} y\frac{dx}{dt}dt \\ &=\int_0^{\pi} y\sqrt{1-\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt \end{aligned}$$

オイラーの方程式より，

$$\begin{aligned} y\sqrt{1-\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}-\frac{y\left(-2\frac{dy}{dt}\right)\frac{dy}{dt}}{2\sqrt{1-\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}}&=C_1 \\ y\left(1-\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right)+y\left(\frac{dy}{dt}\right)^2&=C_1\sqrt{1-\left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \\ y&=C_1\sqrt{1-\left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \\ \frac{dy}{dt}&=\pm\sqrt{1-\frac{y^2}{C_1^2}} \\ \sqrt{\frac{C_1^2}{C_1^2-y^2}}\frac{dy}{dt}&=\pm 1 \\ \int\sqrt{\frac{C_1^2}{C_1^2-y^2}}dy&=\pm t \end{aligned}$$

$y=C_1\sin\theta$ とおくと，$t=\pm\theta+C$．端点の条件等より，$C=0, C_1=1$.

$$\therefore y=\pm\sin t$$

$$\frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{1-\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$
$$= \pm \sin t$$
$$x = \pm \cos t + C_2$$

端点の条件より，

$$x = \pm(\cos t - 1)$$

(x, y) を第 1 象限に限ると（限らなくてもそれぞれに正しいのだが），

$$\begin{cases} x = 1 - \cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases}$$

t を消去すると，

$$(x-1)^2 + y^2 = 1$$

これは，極大であるという保証はないが，少なくともその候補となる．実際最大となるのは周知のことである．

補講

$\boxed{\text{曲面 } z = f(x, y) \text{ の面積を求める公式の導き方}}$

（中略）方向余弦を用いればよい．

領域 xy 平面における領域 A の上方あるいは下方にある曲面 $z = f(x, y)$ の面積は

$$\boxed{S = \iint_A \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy}$$

参考文献

[1] L.E.Elsgolc 瀬川富士訳『科学者・技術者のための変分法－理工学海外名著シリーズ 11 － 』（ブレイン図書出版，1972 年）．