$\int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, \cdots, y_n, y_1', y_2', \cdots, y_n')dx$ の形の汎関数

ひとつのみ変化する変関数 $y_i(x)$ を考え，その他の変関数は固定したままにする．つまり，

$$v(y_1, y_2, \cdots, y_n) = \tilde{v}(y_i)$$

とかける．$\tilde{v}(y_i)$ というのは，いわば偏微分のように他を固定して，という意味である．この汎関数を極値にする関数は，オイラーの方程式,

$$F_{y_i} - \frac{d}{dx}F_{y_i'} = 0$$

を満足しなければならない．このことは全ての F_{y_i} についていえることであるから，次のオイラーの方程式系（連立オイラーの方程式），

$$\boxed{F_{y_i} - \frac{d}{dx}F_{y_i'} = 0, i = 1, 2, \cdots, n}$$

が得られる．特に，汎関数が 2 つの変関数 $y(x), z(x)$ だけに依存するときは，

$$v(y(x), z(x)) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, z, y', z')dx,$$

$$y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1, z(x_0) = z_0, z(x_1) = z_1$$

と表され，極値曲線は次のオイラーの方程式系を満たす．

$$\boxed{F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0, F_z - \frac{d}{dx}F_{z'} = 0} \tag{1}$$

$$\begin{cases} F_y - \dfrac{\partial}{\partial x}F_{y'} - \dfrac{\partial}{\partial y}F_{y'}\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{\partial}{\partial z}F_{y'}\dfrac{dz}{dx} - \dfrac{\partial}{\partial y'}F_{y'}\dfrac{dy'}{dx} - \dfrac{\partial}{\partial z'}F_{y'}\dfrac{dz'}{dx} = 0 \\ F_z - \dfrac{\partial}{\partial x}F_{z'} - \dfrac{\partial}{\partial y}F_{z'}\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{\partial}{\partial z}F_{z'}\dfrac{dz}{dx} - \dfrac{\partial}{\partial y'}F_{z'}\dfrac{dy'}{dx} - \dfrac{\partial}{\partial z'}F_{z'}\dfrac{dz'}{dx} = 0 \end{cases}$$

より，

$$\begin{cases} F_y - F_{xy'} - F_{yy'}y' - F_{zy'}z' - F_{y'y'}y'' - F_{z'y'}z'' = 0 \\ F_z - F_{xz'} - F_{yz'}y' - F_{zz'}z' - F_{y'z'}y'' - F_{z'z'}z'' = 0 \end{cases}$$

となるが，長すぎるので，(1) で覚えておけばいいだろう．

例題 1. 次の汎関数の極値曲線を求めよ．

$$v(y(x), z(x)) = \int_{x_0}^{x_1} (y'^2 + z'^2 + 2yz)dx, y(0) = 0, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, z(0) = 0, z\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

解　$F_y = 2z, F_{y'} = 2y', F_z = 2y, F_{z'} = 2z'$ であるから，オイラーの方程式系は,

$$\begin{cases} 2z - 2y'' = 0 \\ 2y - 2z'' = 0 \end{cases} \text{つまり，} \begin{cases} z = y'' \\ y = z'' \end{cases}, \quad \text{さらには，} y^{(4)} - y = 0$$

と表せる．微分方程式に対して，特性方程式は，

$$\lambda^4 - 1 = 0$$

特性根は，

$$\lambda = \pm 1, \pm i$$

後述の定理により，この微分方程式の特殊解は，

$$e^{\pm x}, \cos x, \sin x$$

であって，求める解は，この 4 つの解の 1 次結合で表される．つまり，

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x$$

初期条件 $y(0) = 0$ より，

$$C_1 + C_2 + C_3 = 0$$

$z(0) = 0$ より，

$$C_1 + C_2 - C_3 = 0$$

$$\therefore C_3 = 0$$

$$C_1 = -C_2$$

$y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$ より，

$$C_1 e^{-\frac{\pi}{2}} + C_2 e^{\frac{\pi}{2}} + C_4 = 1$$

$z\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -1$ より，

$$C_1 e^{-\frac{\pi}{2}} + C_2 e^{\frac{\pi}{2}} - C_4 = -1$$

$$\therefore C_4 = 1$$

$$C_1 e^{-\frac{\pi}{2}} - C_1 e^{\frac{\pi}{2}} = 0$$

$$C_1 \left(\frac{1}{e^{\frac{\pi}{2}}} - e^{\frac{\pi}{2}} \right) = 0$$

$$\therefore C_1 = C_2 = 0$$

$$\therefore y = \sin x, z = -\sin x$$

定理　定数係数の微分方程式，

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

に対する特性方程式を，

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \cdots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0$$

とする．この単根を，

$$\lambda_1, \cdots, \lambda_j$$

相異なる k 種類の実数の m_j 重根を,

$$\mu_1, \cdots, \mu_k$$

相異なる l 種類の虚数の n_j 重根（共役で 1 種類と数える）を,

$$\alpha_1 + i\beta_1, \cdots, \alpha_l + i\beta_l, \alpha_1 - i\beta_1, \cdots, \alpha_l - i\beta_l$$

とすると，微分方程式の n 個の特殊解は,

$$\begin{aligned}
&e^{\lambda_1}, \cdots, e^{\lambda_j}, \\
&e^{\mu_j}, \cdots, x^{m_j-1}e^{\mu_j}, (j = 1, 2, \cdots, k) \\
&e^{\alpha_j x}\cos\beta_j x, \cdots, x^{n_j-1}\cos\beta_j x, (j = 1, 2, \cdots, l) \\
&e^{\alpha_j x}\sin\beta_j x, \cdots, x^{n_j-1}\sin\beta_j x, (j = 1, 2, \cdots, l)
\end{aligned}$$

で，一般解はこれらの一次結合で与えられる.

別解　ラプラス変換を用いて,

$$\begin{aligned}
&s^4Y - s^3y(0) - s^2y'(0) - sy''(0) - y'''(0) - Y = 0 \\
&(s^4 - 1)Y - As^3 - Bs = 0 \\
&Y = \frac{As^3 + Bs}{s^4 - 1} = \frac{C_1 s}{s^2 + 1} + \frac{C_2}{s^2 + 1} + \frac{C_3}{s - 1} + \frac{C_4}{s + 1} \\
&\therefore y = C_1\cos x + C_2\sin x + C_3e^x + C_4e^{-x}
\end{aligned}$$

（後略）

参考文献

[1] L.E.Elsgolc 瀬川富士訳『科学者・技術者のための変分法－理工学海外名著シリーズ 11 － 』（ブレイン図書出版，1972 年）

[2] 黒田正『微分方程式の解法』（朝倉書店，初等数学シリーズ 6，1972 年）