高階の導関数を含む汎関数

汎関数,

$$v(y(x)) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y', \cdots, y^{(n)})dx$$

も極値を調べる．最初に最も簡単な汎関数,

$$v(y(x)) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx$$

の極値を調べたとき，$\delta y'$ を消すために部分積分を行ったが，同様に $\delta y^{(n)}$ を消すために n 回部分積分すればよい．その結果次の $2n$ 階の微分方程式を得る．

$$\boxed{F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2}F_{y''} + \cdots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}F_{y^{(n)}} = 0}$$

この方程式は，**オイラー・ポアソンの方程式 (*Euler-Poisson equation*)** とよばれ，この方程式の積分曲線も極値曲線と呼ばれる．

例題 1． 汎関数,

$$v(y(x)) = \int_0^1 (1 + y''^2)dx$$

の境界条件,

$$y(0) = 0, y'(0) = 1, y(1) = 1, y'(1) = 1$$

を満足する極値曲線を求めよ．

オイラー・ポアソンの方程式は,

$$\frac{d^2}{dx^2}y'' = 0$$

$$\therefore y^{(4)} = 0$$

一般解は,

$$y = C_1x^3 + C_2x^2 + C_3x + C_4$$

境界条件より，求める極値曲線は

$$y = x \ldots \text{（答え）}$$

例題 2． 汎関数,

$$v(y(x)) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (y''^2 - y^2 + x^2)dx, y(0) = 1, y'(0) = 0, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

の極値曲線を求めよ．

解 オイラーの方程式は,

$$-2y + \frac{d^2}{dx^2}2y'' = 0$$

$$y - y^{(4)} = 0$$

前節例題１．と同じように，この微分方程式の一般解は，

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x$$

境界条件より，

$$C_1 + C_2 + C_3 = 1$$

$$-C_1 + C_2 + C_4 = 0$$

$$C_1 e^{-\frac{\pi}{2}} + C_2 e^{\frac{\pi}{2}} + C_4 = 0$$

$$-C_1 e^{-\frac{\pi}{2}} + C_2 e^{\frac{\pi}{2}} - C_3 = -1$$

$$C_1 \left(e^{-\frac{\pi}{2}} + 1\right) + C_2 \left(e^{\frac{\pi}{2}} - 1\right) = 0$$

$$C_1 \left(-e^{-\frac{\pi}{2}} + 1\right) + C_2 \left(e^{\frac{\pi}{2}} + 1\right) = 0$$

$\left(e^{-\frac{\pi}{2}} + 1\right)\left(e^{\frac{\pi}{2}} + 1\right) - \left(e^{\frac{\pi}{2}} - 1\right)\left(-e^{-\frac{\pi}{2}} + 1\right) = 4 \neq 0$ より，$C_1 = C_2 = C_4 = 0, C_3 = 1$

$$\therefore y = \cos x$$

例題 3． 汎関数，

$$v(y(x)) = \int_{-l}^{l} \left(\frac{1}{2}\mu y''^2 + \rho y\right) dx, y(-l) = 0, y'(-l) = 0, y(l) = 0, y'(l) = 0$$

の極値曲線を求めよ．

解　オイラー・ポアソンの方程式は，

$$\rho - \mu \frac{d^2}{dx^2} y'' = 0$$

$$y^{(4)} = -\tfrac{\rho}{\mu}$$

$$\therefore y = -\frac{\rho x^4}{24\mu} + C_1 x^3 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4$$

境界条件より，

$$-\frac{\rho l^4}{24\mu} - C_1 l^3 + C_2 l^2 - C_3 l + C_4 = 0$$

$$-\frac{\rho l^4}{24\mu} + C_1 l^3 + C_2 l^2 + C_3 l + C_4 = 0$$

$$-\frac{\rho l^4}{24\mu} + C_2 l^2 + C_4 = 0$$

$$C_1 l^3 + C_3 l = 0 \to C_1 l^2 + C_3 = 0$$

$$\frac{\rho l^3}{6\mu} + 3C_1 l^2 - 2C_2 l + C_3 = 0$$

$$-\frac{\rho l^3}{6\mu} + 3C_1 l^2 + 2C_2 l + C_3 = 0$$

$$\frac{\rho l^3}{6\mu} - 2C_2 l = 0 \to \frac{\rho l^2}{12\mu} - C_2 = 0$$

$$3C_1 l^2 + C_3 = 0$$

$$C_1 = C_3 = 0$$

$$C_2 = \frac{\rho l^2}{12\mu}, C_4 = -\frac{\rho l^4}{24\mu}$$

$$y = -\frac{\rho x^4}{24\mu} + \frac{\rho l^2}{12\mu}x^2 - \frac{\rho l^4}{24\mu}$$

$$y = -\frac{\rho}{24\mu}(x^2 - l^2)^2$$

汎関数,

$$v(y(x), z(x)) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}, z, z', \cdots, z^{(m)})dx$$

の，極値に対する必要条件は,

$$\begin{cases} F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} + \cdots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}F_{y^{(n)}} = 0 \\ F_z - \frac{d}{dx}F_{z'} + \cdots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}F_{z^{(n)}} = 0 \end{cases}$$

さらに，任意の個数の関数を変換数とする汎関数,

$$v(y_1, y_2, \cdots, y_m) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_1', \cdots, y_1^{(n_1)}, y_2, y_2', \cdots, y_2^{(n_2)}, \cdots, y_m, y_m', \cdots, y_m^{(n_m)})dx$$

の極値に関する必要条件は,

$$F_{y_i} - \frac{d}{dx}F_{y_i'} + \cdots + (-1)^{n_i}\frac{d^{n_i}}{dx^{n_i}}F_{y_i^{(n_i)}} = 0, (i = 1, 2, \cdots, m)$$

参考文献

[1] L.E.Elsgolc 瀬川富士訳『科学者・技術者のための変分法－理工学海外名著シリーズ 11 － 』（ブレイン図書出版，1972 年）